

XIII. Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

In diesem letzten Kapitel der Analysis in mehreren Veränderlichen werden wir uns noch kurz der Integrationstheorie zuwenden. Für eine ausführliche Diskussion der Integralrechnungen in mehreren Veränderlichen reicht die uns verbleibende Zeit hier nicht aus und dafür ist ohnehin die Vorlesung „Mehrfachintegration“ vorgesehen. Wir werden daher nur kurz die wichtigsten Eckpfeiler der Theorie kennenlernen (im wesentlichen ohne Beweise) und sehen, dass man damit durchaus für viele praktische Zwecke genug weiß, um konkrete Integrale berechnen zu können.

XIII.1. Das mehrdimensionale Riemann–Integral

Wie in der eindimensionalen Integrationstheorie betrachten wir nur beschränkte Funktionen

$$f: [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall i) a_i \leq x_i \leq b_i\} \rightarrow \mathbb{R},$$

die auf Quadern $[a, b]$ in \mathbb{R}^n definiert sind.

Auch hier beginnen wir mit dem Konzept einer Stufenfunktion, das allerdings durch die höhere Dimension etwas komplizierter wird.

Definition XIII.1.1. Sei $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader.

(a) Eine Menge $\mathcal{Z} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ von nicht überlappenden Quadern Q_j heißt *Zerlegung von Q* , wenn

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j.$$

Mit “nicht überlappend” meinen wir hier, dass der Schnitt $Q_i \cap Q_j$ zwar nicht leer sein muss, aber keine inneren Punkte enthalten darf (vgl. Aufgabe 1.1).

(b) Die Zahl

$$\text{vol}_n(Q) := \mu(Q) := \prod_{i=1}^n b_i - a_i$$

heißt *Maß* oder *n -dimensionales Volumen* von Q .

(c) Die Zahl $\delta(Q) := \|b - a\|_\infty$ heißt *Durchmesser von Q* . Ist $\delta(Q_k)$ der Durchmesser von Q_k , so heißt

$$\|\mathcal{Z}\| := \max_{1 \leq k \leq m} \delta(Q_k)$$

Norm der Zerlegung. ■

Aufgabe 1.1. (Durchschnitte von Quadern) Seien $a \leq b$ und $c \leq d$ in \mathbb{R}^n . Dann ist

$$[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(b, d)]$$

wieder ein Quader. Hierbei ist

$$\max(a, c) := (\max(a_1, c_1), \dots, \max(a_n, c_n))$$

und

$$\min(b, d) := (\min(b_1, d_1), \dots, \min(b_n, d_n)).$$
 ■

Definition XIII.1.2. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (Q_1, \dots, Q_m)$ von $[a, b]$ und Zahlen $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = c_k \quad \text{für } x \in Q_k^0.$$

Wir sprechen dann von einer Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung \mathcal{Z} . Von den Funktionswerten an den Rändern der Quader Q_k wird nichts verlangt. Wir schreiben T_a^b für die Menge der Treppenfunktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. ■

Wie im Eindimensionalen stellt man leicht fest, dass T_a^b ein Vektorraum ist und dass man auf T_a^b einen wohldefinierten (also von der Zerlegung unabhängigen) Integralbegriff durch

$$\int_{[a,b]} f := \int_{[a,b]} f(x) dx := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \mu(Q_i)$$

definieren kann, wobei $\xi_i \in Q_i^0$ ist und die Funktion f auf dem Innern Q_i^0 des Zerlegungsquaders Q_i konstant ist. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass das Integral auf T_a^b monoton und linear ist.

Definition XIII.1.3. (a) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir das *Oberintegral*

$$\overline{\int}_{[a,b]} f := \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi : f \leq \psi, \psi \in T_a^b \right\}$$

und das *Unterintegral*

$$\underline{\int}_{[a,b]} f := \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi : \varphi \leq f, \varphi \in T_a^b \right\}.$$

Um die Endlichkeit dieser Werte einzusehen, beachten wir, dass aus der Beschränktheit von f die Existenz von $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f \leq M$ folgt. Insbesondere existieren $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Für solche Paare gilt $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$ wegen der Monotonie des Integrals auf T_a^b . Insbesondere sind $\overline{\int}_{[a,b]} f$ und $\underline{\int}_{[a,b]} f$ reelle Zahlen mit

$$\underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f.$$

(b) Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar* (*Riemann-integrierbar*), wenn

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f$$

gilt, d.h., wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_{[a,b]} \varphi - \int_{[a,b]} \psi \leq \varepsilon$ existieren. In diesem Fall definieren wir das *Riemann-Integral von f* durch

$$\int_{[a,b]} f := \overline{\int}_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,b]} f$$

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit R_a^b . Wir bemerken, dass $T_a^b \subseteq R_a^b$ trivialerweise gilt. ■

Wie im Eindimensionalen zeigt man nun, dass auch R_a^b ein Vektorraum ist und das Integral darauf eine monotone lineare Abbildung. Sind f und g Riemann-integrierbar, so auch

$$\max(f, g), \quad \min(f, g), \quad f \pm g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad |f|.$$

Von zentraler Bedeutung ist allerdings, dass alle stetigen Funktionen Riemann-integrierbar sind:

Satz XIII.1.4. *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz IX.3.19 ist f gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für alle x, y mit $\|x - y\|_\infty \leq \delta$. Wir wählen nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{b_i - a_i}{N} < \delta$ für alle i gilt. Für $j \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq j_i \leq N - 1$ bilden die Quader

$$Q_j := Q_{(j_1, \dots, j_n)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (\forall i) a_i + \frac{j_i(b_i - a_i)}{N} \leq x_i \leq a_i + \frac{(j_i + 1)(b_i - a_i)}{N} \right\}$$

dann eine Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ mit $\|\mathcal{Z}\| \leq \delta$. In der Tat erhalten wir N^n Quader des Durchmessers $\frac{1}{N} \delta([a, b]) = \frac{1}{N} \|b - a\|_\infty$. Für jedes j sei

$$m_j := \inf f(Q_j) \quad \text{und} \quad M_j := \sup f(Q_j).$$

Sei $\varphi \leq f$ eine Treppenfunktion, die auf Q_j^0 den Wert m_j annimmt und $\psi \geq f$ eine Treppenfunktion, die auf Q_j^0 den Wert M_j annimmt. Dann ist $\varphi \leq f \leq \psi$ und aus $\delta(\mathcal{Z}) \leq \delta$ folgt $M_j - m_j \leq \varepsilon$ für alle j , also $\psi - \varphi \leq \varepsilon$. Hieraus ergibt sich

$$\overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \varepsilon \mu([a,b]).$$

Da ε beliebig war, folgt die Gleichheit von Ober- und Unterintegral, also die Integrabilität von f . ■

Definition XIII.1.5. (a) Eine beschränkte Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$, die natürlich in einem ausreichend großen Quader Q liegt, heißt *Riemann-messbar*, wenn ihre charakteristische Funktion

$$\chi_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in S \\ 0 & \text{für } x \notin S \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. Ist dies der Fall, so heißt

$$\mu(S) := \mu_n(S) := \int_Q \chi_S(x) dx$$

das *n-dimensionale Volumen der Menge S*.

(b) Eine *Riemannsche Nullmenge* ist eine Riemann-messbare Menge N , für die $\mu_n(N) = 0$ ist. ■

Zunächst einmal wissen wir recht wenig über Riemann-messbare Mengen, so dass es gar nicht so einfach ist, eine solche zu erkennen bzw. Riemann-Messbarkeit einer gegebenen Menge nachzuweisen. Wir stellen hierzu einige Hilfsmittel zusammen.

Satz XIII.1.6. *Eine beschränkte Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Riemann-messbar, wenn ihr Rand ∂S eine Riemannsche Nullmenge ist.* ■

Ein typisches Beispiel einer nicht Riemann-messbaren Teilmenge von \mathbb{R} ist die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1. Der Rand dieser Menge ist das ganze Intervall $[0, 1]$, also keine Nullmenge. Analog sieht man, dass $([0, 1] \cap \mathbb{Q})^n$ eine nicht Riemann messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n ist.

Satz XIII.1.6 reduziert das Problem der Riemann-Messbarkeit auf das Problem zu erkennen, ob gewisse Menge Riemannsche Nullmengen sind.

Lemma XIII.1.7. (a) *Endliche Vereinigungen und Teilmengen Riemannscher Nullmengen sind Riemannsche Nullmengen.*

(b) *Jede kompakte Teilmenge einer affinen Hyperbene in \mathbb{R}^n ist eine Riemannsche Nullmenge.*

(c) *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist der Graph $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Riemannsche Nullmenge.* ■

XIII.2. Berechnung von mehrdimensionalen Integralen

In diesem Abschnitt lernen wir Methoden kennen, mit denen man mehrdimensionale Integrale berechnen kann. Im Eindimensionalen besteht die Hauptmethode zur Berechnung von Integralen darin, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anzuwenden, also durch Bestimmung einer Stammfunktion Integrale auszuwerten. Im Mehrdimensionalen wiederum besteht die wichtigste Methode darin, Mehrfachintegrale auf einfache Integrale zurückzuführen. Die wichtigsten Werkzeuge hierzu sind der Satz von Fubini und das Prinzip von Cavalieri.

Wir beginnen mit dem zweidimensionalen Fall des Satzes von Fubini:

Satz XIII.2.1. (Fubini) Sei $n = 2$ und die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei integrierbar. Für jedes $x \in [a_1, b_1]$ existiere das Integral

$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy.$$

Dann existiert das iterierte Integral

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx = \int_{a_1}^{b_1} F(x) dx$$

und stimmt mit dem Riemann-Integral

$$\int_{[a,b]} f(x, y) d(x, y)$$

überein. ■

Bemerkung XIII.2.2. (a) Man beachte, dass wir bei Satz XIII.2.1 voraussetzen, dass die Funktion f Riemann-integrierbar ist und dass dies i.a. nicht aus der Existenz des iterierten Integrals folgt.

(b) Existieren beide iterierten Integrale, so folgt aus Satz XIII.2.1 insbesondere, dass sie den gleichen Wert haben.

(c) Ist die Funktion in Satz XIII.2.1 stetig, so ist sie gemäß Satz XIII.1.4 integrierbar. In diesem Fall existieren alle Integrale $F(x)$ und definieren eine stetige Funktion auf $[a_1, b_1]$ (Satz X.5.1). Hieraus folgt insbesondere, dass wir das Integral von f über $[a, b]$ als Doppelintegral berechnen können. ■

Bemerkung XIII.2.3. Mit dem Satz von Fubini können wir einsehen, dass die Deutung des Integrals einer Riemann-integrierbaren Funktion konsistent mit unserer Definition des zweidimensionalen Volumens (Flächeninhalts) ist.

Sei dazu $f: [a, b] \rightarrow [0, M]$ eine beschränkte Riemann-integrierte Funktion. Man sieht sehr leicht ein, dass die Menge

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

eine Riemann-messbare Menge ist. Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\mu_2(S) = \int_a^b \int_0^M \chi_S(x, y) dy dx = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Beispiel XIII.2.4. Auf

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$$

betrachten wir die durch

$$f(x, y) := x^y = e^{y \log x}$$

definierte stetige Funktion (Nachweis der Stetigkeit als Übung!). Wegen der Stetigkeit ist f Riemann-integriert und wir erhalten mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) dx dy &= \int_1^2 \int_0^1 x^y dx dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = [\log(1+y)]_1^2 = \log(3) - \log(2) = \log \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Im folgenden führen wir für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ die abkürzende Schreibweise

$$x' = (x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

ein.

Satz XIII.2.5. (Fubini) Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei integrierbar.

(a) Für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$[a, b]_k = \{(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}: (\forall i) a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Existiert für jedes $x_k \in [a_k, b_k]$ das Integral

$$F(x_k) := \int_{[a, b]_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) d(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_n),$$

so existiert das iterierte Integral $\int_{a_k}^{b_k} F(x_k) dx_k$ und stimmt mit dem Riemann-Integral

$$\int_{[a, b]} f(x) dx$$

überein.

(b) Existiert für jedes $x' \in [a, b]_k$ das Integral

$$G(x') := \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_k,$$

so existiert das iterierte Integral

$$\int_{[a, b]_k} G(x') dx'$$

und stimmt mit dem Riemann-Integral $\int_{[a, b]} f(x) dx$ überein. ■

Bemerkung XIII.2.6. Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so auch alle Einschränkungen auf die $(n-1)$ -dimensionalen Quader $[a, b]_k$, und aus Satz XIII.1.4 folgt die Existenz aller Integrale. Aus Satz X.5.1 folgt sogar die Stetigkeit der Funktionen F bzw. G . ■

Beispiel XIII.2.7. Sei

$$Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4\} = [(0, 0, 2), (2, 1, 4)]$$

und

$$f: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := x + y + z.$$

Da f stetig ist, ist f Riemann-integrierbar. Mit

$$Q_3 = [(0, 0), (2, 1)]$$

ergibt sich aus dem Satz von Fubini XIII.2.5 induktiv

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_2^4 \int_{Q_3} (x + y + z) d(x, y) dz \\ &= \int_2^4 \int_0^1 \int_0^2 (x + y + z) dx dy dz \\ &= \int_2^4 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + x(y + z) \right]_0^2 dy dz = \int_2^4 \int_0^1 2 + 2(y + z) dy dz \\ &= \int_2^4 2 + 2z + 1 dz = 6 + [z^2]_2^4 = 6 + 16 - 4 = 18. \end{aligned}$$

■

Bemerkung XIII.2.8. Im Eindimensionalen erhält man direkt aus der Substitutionsregel die Formel

$$c \int_a^b f(ct) dt = \int_{ca}^{cb} f(x) dx.$$

Ist der Satz von Fubini anwendbar, d.h., die iterierten Integrale existieren, dann lässt sich das n -dimensionale Integral als iteriertes Riemann-Integral berechnen, so dass wir für $c > 0$ direkt die Formel

$$c^n \int_{[a,b]} f(cx) dx = \int_{[ca,cb]} f(x) dx$$

erhalten.

Ist $f = \chi_S$ die charakteristische Funktion einer Riemann-messbaren Menge $S \subseteq [a, b]$, so ist $\chi_{cS}(x) = \chi_S(c^{-1}x)$ und daher

$$\mu_n(cS) = \int_{[ca,cb]} \chi_S(c^{-1}x) dx = c^n \int_{[a,b]} \chi_S(x) dx = c^n \mu_n(S),$$

also

$$(2.1) \quad \mu_n(cS) = c^n \mu_n(S).$$

■

Für die Berechnung n -dimensionaler Volumina ist das *Prinzip von Cavalieri* sehr nützlich:

Satz XIII.2.9. (Cavalieri) Sei $S \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Riemann-messbare Menge. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $t \in [a_k, b_k]$ die Menge

$$S_t := \{x \in S : x_k = t\}$$

im $(n-1)$ -dimensionalen Raum

$$A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = t\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

Riemann-messbar mit dem $(n-1)$ -dimensionalen Volumen $\mu_{n-1}(S_t)$. Dann ist

$$\mu_n(S) = \int_{a_k}^{b_k} \mu_{n-1}(S_t) dt.$$

Beweis. Nach Satz XIII.2.5 ist

$$\begin{aligned} \mu_n(S) &= \int_{[a,b]} \chi_S(x) dx = \int_{a_k}^{b_k} \int_{[a,b]_k} \chi_S(x) d(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_n) dx_k \\ &= \int_{a_k}^{b_k} \mu_{n-1}(S_{x_k}) dx_k = \int_{a_k}^{b_k} \mu_{n-1}(S_t) dt. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 1.2. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Wir definieren den Kegel über der Basis B durch

$$K(B) := \{(1-t)x, t\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, x \in B\}.$$

Sind B und $K(B)$ Riemann-messbar, so gilt

$$\mu_{n+1}(K(B)) = \frac{1}{n+1} \mu_n(B).$$

Kommt Ihnen diese Formel aus der Schule bekannt vor? Vergleichen Sie insbesondere mit den bekannten Formeln für das Volumen eines Kegels, einer Pyramide oder die Fläche eines Dreiecks. ■

Das Volumen der n -dimensionalen Kugel

Beispiel XIII.2.10. Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ die n -dimensionale Einheitskugel und $c_n := \mu_n(B_n)$ ihr Volumen. Aus Bemerkung XIII.2.8 wissen wir schon, dass

$$(2.2) \quad \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}) = \mu_n(RB_n) = c_n R^n$$

gilt, so dass es in der Tat ausreicht, das Volumen c_n der Einheitskugel zu bestimmen, um die Volumina beliebiger Kugeln zu kennen.

Wir kennen schon $c_1 = 2$ (denn $B_1 = [-1, 1]$ hat die Länge 2) und wissen vielleicht auch noch aus der Schule, welche Werte wir für c_2 und c_3 erwarten.

Wir gehen nach dem Cavalierischen Prinzip vor und zerschneiden die Kugel B_n für $-1 \leq s \leq 1$ in die Scheiben

$$\begin{aligned} B_{n,s} &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', s) \in B_n\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\|_2 \leq \sqrt{1-s^2}\} = \sqrt{1-s^2} B_{n-1}. \end{aligned}$$

Mit dem Cavalierischen Prinzip erhalten wir für $n > 1$ mit (2.2):

$$c_n = \int_{-1}^1 \mu_{n-1}(B_{n,s}) ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2}^{n-1} c_{n-1} ds = c_{n-1} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2}^{n-1} ds.$$

Damit ist die rekursive Berechnung von c_n auf die Berechnung des Integrals

$$I_n := \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2}^{n-1} ds$$

reduziert. Substituieren wir mit

$$s: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \quad s(t) = \sin t,$$

so erhalten wir

$$I_n = \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2}^{n-1} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-s(t)^2}^{n-1} s'(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

Diese Integrale lassen sich nun durch partielle Integration rekursiv berechnen. Für $n > 1$ haben wir

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(\cos t)^{n-1} dt \\ &= [(\sin t)(\cos t)^{n-1}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)(n-1)(\cos t)^{n-2}(-\sin t) dt \\ &= (n-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^{n-2} dt = (n-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\cos t)^2) (\cos t)^{n-2} dt \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $n > 1$ die Rekursionsformel

$$(2.3) \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Aus $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ erhalten wir allgemein

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 2} \pi = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n(n-1)\cdots 1} \pi = \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \pi$$

und

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} 2 = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots \frac{3}{2}} 2 = \binom{n+\frac{1}{2}}{n}^{-1} 2.$$

Hieraus ergibt sich

$$I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2\pi}{2n+1} \quad \text{und} \quad I_{2n}I_{2n-1} = \frac{\pi}{n}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} c_{2n} &= I_{2n}c_{2n-1} = I_{2n}I_{2n-1}c_{2n-2} = \frac{\pi}{n}c_{2n-2} = \cdots = \frac{\pi^{n-1}}{n \cdots 2} c_2 \\ &= \frac{\pi^{n-1}}{n \cdots 2} I_2 c_1 = \frac{\pi^{n-1}}{n \cdots 2} \frac{\pi}{2} c_1 = \frac{\pi^n}{n!} \end{aligned}$$

und analog

$$c_{2n+1} = I_{2n+1}I_{2n}c_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n+1}c_{2n-1} = \frac{2^n \pi^n}{(2n+1)\cdots 3} c_1 = \frac{2^{n+1} \pi^n}{(2n+1)\cdots 3}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich insbesondere die bekannte Formel

$$c_2 = \pi$$

für die Fläche der Einheitskreisscheibe. Für $n = 3$ erhalten wir für das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel:

$$c_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

Verwendet man die *Gamma-Funktion*:

$$\Gamma:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

so kann man die Formel für c_n wie folgt einheitlich schreiben:

$$(2.4) \quad c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Hierzu erinnern wir uns an die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{für } x > 0,$$

aus der insbesondere $\Gamma(n) = (n - 1)!$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Für $n = 2k$ folgt (2.4) aus

$$\frac{\pi^k}{\Gamma(k + 1)} = \frac{\pi^k}{k!} = c_{2k}.$$

Für $n = 2k + 1$ erhalten wir für die rechte Seite:

$$\frac{\pi^k \sqrt{\pi}}{\Gamma(k + 1 + \frac{1}{2})} = \frac{\pi^k \sqrt{\pi}}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Es bleibt also nur noch einzusehen, dass

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$$

gilt. Diese Formel werden wir erst später beweisen, wenn uns die Transformationsformel zur Verfügung steht (Beispiel XIII.3.8). ■

Beispiel XIII.2.11. Wir wollen das Volumen V eines dreidimensionalen Kugelsegments der Höhe h bestimmen, für das die Basiskreisscheibe den Radius r besitzt.

Ist R der Radius der Kugel, so betrachten wir also eine Menge der Gestalt

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3: \|x\|_2 \leq R, x_3 \geq R - h\},$$

wobei

$$R^2 = r^2 + (R - h)^2$$

ist, also

$$r^2 - 2Rh + h^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$

Die Hyperebene $x_3 = t$, $R - h \leq t \leq R$, schneidet dieses Segment in der Menge

$$S_t = \{(x_1, x_2, t): x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 - t^2\},$$

einer Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{R^2 - t^2}$. Mit $c_2 = \pi$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \mu_3(S) &= \int_{R-h}^R \mu_2(S_t) dt = \int_{R-h}^R \pi(R^2 - t^2) dt = \pi R^2 h - \frac{\pi}{3}(R^3 - (R-h)^3) \\ &= \pi R^2 h - \frac{\pi}{3}(3R^2 h - 3Rh^2 + h^3) = \pi \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Mit $Rh = \frac{r^2 + h^2}{2}$ ergibt sich

$$\mu_3(S) = \frac{\pi h}{6}(3(r^2 + h^2) - 2h^2) = \frac{\pi h}{6}(3r^2 - h^2).$$

Für $h = R = r$ ist S eine Halbkugel und wir erhalten

$$\mu_3(S) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Hier erkennen wir insbesondere eine Einsicht, die schon auf Archimedes zurückgeht, nämlich, dass das Verhältnis des Volumens einer Halbkugel zum Volumen des Kreiszyinders von Radius und Höhe R (in den die Halbkugel gerade hineinpasst) $\frac{2}{3}$ ist. ■

XIII.3. Die Transformationsformel für Mehrfachintegrale

Bisher haben wir im wesentlichen nur Integrale über Quader berechnet, wobei der Satz von Fubini eine bequeme Methode bereitstellt, durch die man solche Integrale durch sukzessive eindimensionale Integrale berechnen kann. Für viele Problemstellungen reicht dieser Ansatz nicht aus, denn oft hat man über Bereiche des \mathbb{R}^n zu integrieren, die sich in kartesischen Koordinaten nur mühsam

beschreiben lassen. Ebenso kann es vorkommen, das zwar die Integrationsbereiche unproblematisch sind, dafür aber die zu integrierenden Funktionen in kartesischen Koordinaten unangemessen kompliziert, was ihre Integration erschweren kann. Aus diesen Gründen führt man oft dem Problem angemessene neue Koordinaten ein, indem man mit einem geeigneten C^1 -Diffeomorphismus transformiert.

Dieser Abschnitt ist dem mehrdimensionalen Analogon der Substitutionsregel, der Transformationsformel, gewidmet. Die Transformation eines mehrdimensionalen Integrals dadurch komplizierter als im Eindimensionalen, dass man schon für die Transformation des Volumens einer Menge nicht nur die Länge eines Bildintervalls messen muss, sondern durchaus geometrisch recht komplizierte Bildmengen haben kann.

Die Koordinatentransformationen, die man zur Berechnung von Mehrfachintegralen heranzieht, sind immer Einschränkungen von C^1 -Diffeomorphismen $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Da φ ein Diffeomorphismus ist, ist die lineare Abbildung $d\varphi(x)$, die durch die Jacobimatrix $J_x(\varphi)$ beschrieben wird, für alle $x \in U$ invertierbar, und es gilt

$$\det(d\varphi(x)) = \det(J_x(\varphi)).$$

TRANSFORMATIONSFORMEL

Satz XIII.3.1. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Riemann-messbare Teilmenge. Auf einer offenen Obermenge $U \supseteq K$ sei $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Ist $f: \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt dann*

$$(3.1) \quad \int_K f(\varphi(x)) |\det d\varphi(x)| dx = \int_{\varphi(K)} f(y) dy.$$

■

Diese Formel wird in einem wesentlich allgemeineren Kontext in der Vorlesung „Mehrfachintegration“ bewiesen. Wir wollen uns aber trotzdem etwas klarmachen, was sie bedeutet. Wendet man (3.1) auf die konstante Funktion 1 an, so ergibt sich

$$(3.2) \quad \mu_n(\varphi(K)) = \int_K |\det d\varphi(x)| dx$$

für das Volumen des Bildes einer kompakten Riemann-messbaren Menge K unter φ . Ist die Funktion $|\det d\varphi(x)|$ konstant c , so spezialisiert sich dies weiter zu

$$\mu_n(\varphi(K)) = c \cdot \mu_n(K).$$

D.h. die Konstante c bzw. $|\det d\varphi(x)|$ ist ein Verzerrungsfaktor, der angibt, wie sich das Volumen einer Menge verändert, wenn man φ anwendet. Einen besonders einfachen Fall erhält man, wenn $\varphi = T|_U$ für eine lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt. Dann ist $d\varphi(x) = T$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und somit

$$\mu_n(T(K)) = |\det T| \cdot \mu_n(K).$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $T(x) = cx$, und in diesem Fall ergibt sich die Formel (2.1) in Bemerkung XIII.2.8.

Für $U = \mathbb{R}^n$ und den Einheitswürfel

$$W = [0, 1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall j) 0 \leq x_j \leq 1\}$$

ergibt sich mit

$$\mu_n(T(W)) = |\det T|$$

gerade die anschauliche Bedeutung der Determinante als ein Maß für das Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Eine Menge der Gestalt $T(W)$ nennt man ein *Parallelepiped* oder *Spat*. Für $n = 2$ erhalten wir Parallelogramme. Man kann sie beschreiben als

$$\sum_{j=1}^n [0, 1]a_j = \left\{ \sum_j x_j a_j : 0 \leq x_j \leq 1 \right\},$$

wobei $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ Vektoren sind, die man als die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter T , d.h. die Spalten der zugehörigen Matrix erhält.

Wir halten noch eine wichtige Folgerung aus der Transformationsformel fest. Eine affine Abbildung der Gestalt $\varphi(x) = M \cdot x + v$, wobei M eine orthogonale Matrix ist, nennen wir eine *Bewegung des \mathbb{R}^n* .

Folgerung XIII.3.2. (Bewegungsinvarianz des Integrals) *Für jede Bewegung φ des \mathbb{R}^n gilt*

$$\mu_n(\varphi(K)) = \mu_n(K)$$

für jede Riemann-messbare kompakte Menge K .

Beweis. Wir schreiben $\varphi(x) = M \cdot x + v$ mit einer orthogonalen Matrix M . Dann ist $MM^T = \mathbf{1}$ (M^T steht für die transponierte Matrix), so dass wir für die Determinanten $1 = \det M \det M^T = (\det M)^2$ erhalten. Also ist $|\det M| = 1$, und die Behauptung folgt aus der Transformationsformel. ■

Da wir das Riemann-Integral zunächst basisabhängig konstruiert haben, da es durch seine Werte auf Quadern festgelegt wurde, ist seine Invarianz unter Drehungen bei weitem nicht evident. Die Bewegungsinvarianz des Riemann-Integrals zeigt, dass seine Konstruktion nicht von der Wahl der Orthonormalbasis in \mathbb{R}^n abhängt, durch die man Koordinaten einführt. Allgemeiner folgt mit dem gleichen Argument, dass man jede Basis nehmen darf, die Bild der kanonischen Basis unter einer linearen Abbildung T mit $|\det T| = 1$ ist, d.h. für die der zugehörige Spat (das Bild des Einheitswürfels) das Volumen 1 hat.

Beispiel XIII.3.3. (Polarkoordinaten in der Ebene) Wir betrachten die Abbildung

$$P: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Die Jacobimatrix von P ist gegeben durch

$$J_{(r,\varphi)}(P) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

so dass wir für die Determinante erhalten:

$$\det(\mathbf{d}P(r, \varphi)) = \det(J_{(r, \varphi)}(P)) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Man beachte, dass nur die Einschränkung von P auf die offene Menge $]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ einen Diffeomorphismus auf die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ liefert (Nachweis!). ■

Beispiel XIII.3.4. (Zylinderkoordinaten im Raum) Wir betrachten die Abbildung

$$P:]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Die Jacobimatrix von P ist gegeben durch

$$J_{(r, \varphi, z)}(P) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\det(\mathbf{d}P(r, \varphi, z)) = \det(J_{(r, \varphi, z)}(P)) = r.$$

Die Einschränkung von P auf die offene Menge $]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ ist ein Diffeomorphismus auf die Menge $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$. ■

Beispiel XIII.3.5. (Sphärische Polarkoordinaten im Raum) Wir betrachten die Abbildung

$$Q:]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Die Jacobimatrix von Q ist gegeben durch

$$J_{(r, \varphi, \theta)}(Q) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix},$$

so dass wir für die Determinante erhalten:

$$\det(J_{(r, \varphi, \theta)}(Q)) = -r^2(\sin \theta)(\cos \theta)^2 - r^2(\sin \theta)(\sin \theta)^2 = -r^2 \sin \theta.$$

Die Einschränkung von Q auf die offene Menge $]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ ist ein Diffeomorphismus auf die Menge $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Die φ -Koordinate entspricht auf den Sphären vom Radius r jeweils der *geographischen Länge* und $\frac{\pi}{2} - \theta$ entspricht der *geographischen Breite*. ■

Beispiel XIII.3.6. (Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$) Wir definieren eine Abbildung

$$P_n: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die induktiv festgelegt ist durch

$$(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \mapsto ((\sin \theta_{n-2})P_{n-1}(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}), r \cos \theta_{n-2}),$$

wobei man für $n = 2$ die Polarkoordinaten in der Ebene zugrunde legt. Die Jacobimatrix von P_n ist für $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ und $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_{n-3})$ gegeben durch

$$J_{(r, \varphi, \theta)}(P_n) = \begin{pmatrix} (\sin \theta_{n-2})J_{(r, \varphi, \theta')}(P_{n-1}) & (\cos \theta_{n-2})P_{n-1}(r, \varphi, \theta') \\ \cos \theta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r \sin \theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Um diese Determinante berechnen zu können, beachten wir zuerst

$$P_{n-1}(r, \varphi, \theta') = rP_{n-1}(1, \varphi, \theta'),$$

was man direkt durch Induktion erhält. Damit ist

$$\frac{\partial P_{n-1}}{\partial r}(r, \varphi, \theta') = P_{n-1}(1, \varphi, \theta') = r^{-1}P_{n-1}(r, \varphi, \theta').$$

Folglich stimmt die erste Spalte der Jacobimatrix von P_{n-1} mit $r^{-1}P_{n-1}$ überein. Die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix, die man durch Streichen der ersten Spalte und der letzten Zeile von $J_{(r, \varphi, \theta)}(P_n)$ erhält, ist daher gegeben durch

$$(-1)^{n-2}(\sin \theta_{n-2})^{n-2}(\cos \theta_{n-2}) \cdot r \cdot \det(J_{(r, \varphi, \theta')}(P_{n-1})).$$

Bei dieser Rechnung hat man zu beachten, dass die fehlende erste Spalte der Matrix, versehen mit den jeweiligen Faktoren, in der letzten Spalte der Restmatrix auftaucht. Hiermit erhalten wir schließlich durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned} & \det(J_{(r, \varphi, \theta)}(P_n)) \\ &= -r(\sin \theta_{n-2})^n \det(J_{(r, \varphi, \theta')}(P_{n-1})) \\ & \quad + (-1)^{n-1}(\cos \theta_{n-2})^2(\sin \theta_{n-2})^{n-2}r(-1)^{n-2} \det(J_{(r, \varphi, \theta')}(P_{n-1})) \\ &= -r(\sin \theta_{n-2})^{n-2} \det(J_{(r, \varphi, \theta')}(P_{n-1})). \end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich also

$$\det(J_{(r, \varphi, \theta)}(P_n)) = (-1)^n r^{n-1} (\sin \theta_{n-2})^{n-2} (\sin \theta_{n-3})^{n-3} \dots \sin \theta_1.$$

Einen Diffeomorphismus mit offenem Bild liefert die Abbildung P_n nur auf der offenen Teilmenge

$$]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[^{n-2}.$$

Die Menge, die man hierbei herausnehmen muss, schneidet jeden Quader in einer Riemannschen Nullmenge und das gleiche gilt im Bildbereich. Man kann daher zeigen, dass die Transformationsformel trotzdem richtig bleibt. ■

In der Physik spielen rotationssymmetrische Massenverteilungen im \mathbb{R}^3 eine wichtige Rolle. Hierbei treten Integrale der Gestalt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{\|x\|} dx$$

auf. Diese Integrale wollen wir jetzt etwas genauer studieren.

Satz XIII.3.7. Seien $0 \leq R_1 < R_2$ und

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : R_1 \leq \|x\| \leq R_2\}$$

die zugehörige Kugelschale sowie $h: [R_1, R_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig Funktion. Dann ist

$$\int_K h(\|x\|) dx = nc_n \int_{R_1}^{R_2} h(r)r^{n-1} dr,$$

wobei c_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist.

Beweis. Wir verwenden sphärische Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n und beachten, dass $K = P_n([R_1, R_2] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2})$ gilt. Für $0 < \varepsilon < \pi$ betrachten wir die kompakte Menge

$$K_\varepsilon := P_n([R_1 + \varepsilon, R_2] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \times [\varepsilon, \pi - \varepsilon]^{n-2}),$$

so dass P_n ein Diffeomorphismus auf einer offenen Umgebung von K_ε ist (Übung). ■
Aus der Beschränktheit von h (Satz vom Maximum) und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_n(K_\varepsilon) = \mu_n(K)$$

folgt nun leicht, dass

$$\int_K h(\|x\|) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\varepsilon} h(\|x\|) dx$$

gilt, so dass wir aus der Transformationsformel mit anschließendem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten:

$$\begin{aligned} & \int_K h(\|x\|) dx \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi h(r) |\det(\mathbf{d}P_n(r, \varphi, \theta))| dr d\varphi d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi h(r) r^{n-1} (\sin \theta_{n-2})^{n-2} (\sin \theta_{n-3})^{n-3} \cdots \sin \theta_1 \\ & \quad dr d\varphi d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} h(r) r^{n-1} dr \cdot \int_0^\pi (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdots \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

Für $R_1 = 0$ und $R_2 = 1$ und $h \equiv 1$ ergibt sich das Volumen c_n der Einheitskugel B_n , also

$$\begin{aligned} c_n &= 2\pi \int_0^1 r^{n-1} dr \cdot \int_0^\pi (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdots \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{2\pi}{n} \int_0^\pi (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdots \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_K h(\|x\|) dx = nc_n \int_{R_1}^{R_2} h(r)r^{n-1} dr. \quad \blacksquare$$

Aufgabe III.2.1. Es seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Man nennt die Menge

$$S(a_0, \dots, a_n) := \left\{ \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j : 0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_j \lambda_j = 1 \right\}$$

das von a_0, \dots, a_n aufgespannte *Simplex*. Zeigen Sie:

- (a) Ein Simplex ist Riemann-messbar. Hinweis: Satz XIII.1.6, Lemma XIII.1.7.
 (b) Zeige:

$$\mu_n(S(a_0, \dots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)|.$$

Hinweis: Man betrachte den Fall, dass die Vektoren $a_j - a_0$, $j = 1, \dots, n$, linear unabhängig sind, separat. \blacksquare

Beispiel XIII.3.8. Ein eindrucksvolles Beispiel, das die Nützlichkeit der Polarkoordinaten demonstriert, ist das folgende. Wir möchten das eindimensionale uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

berechnen. Hierzu betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-x^2 - y^2}.$$

Für die Kreisscheibe

$$K_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$$

erhalten wir in Polarkoordinaten mit Satz XIII.3.7 und anschließender Substitution $u = r^2$:

$$\begin{aligned} \int_{K_R} f(x, y) dx dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{R^2} e^{-u} du \\ &= \pi[-e^{-u}]_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir andererseits für das Quadrat

$$\begin{aligned} Q_R &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq R\} \\ \int_{Q_R} f(x, y) dx dy &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen

$$K_R \subseteq Q_R \subseteq K_{\sqrt{2}R}$$

gilt weiterhin

$$\int_{K_R} f(x, y) d(x, y) \leq \int_{Q_R} f(x, y) d(x, y) \leq \int_{K_{\sqrt{2}R}} f(x, y) d(x, y),$$

also

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}).$$

Für $R \rightarrow \infty$ erhalten wir daher das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad \blacksquare$$

Wir haben in diesem kurzen Abriss der mehrdimensionalen Integrations-
theorie den Riemannschen Zugang verfolgt. In der Vorlesung „Mehrfachinteg-
ration“ werden Sie den Lebegueschen Zugang zur Integrationstheorie kennenler-
nen, der gegenüber dem Riemannschen sehr viele Vorteile besitzt. Es ist damit
sehr viel leichter, Integrierbarkeit von Funktionen nachzuweisen, man hat sehr
einfach anzuwendende Sätze für Vertauschung von Integration und Grenzübergän-
gen und man kann die Theorie unmittelbar auf unbeschränkte Funktionen und
Integrationsbereiche anwenden. Darüber hinaus hat man eine größere Klasse von
Nullmengen, so dass z.B. die Transformationsformel für Lebesgue-Integrale sehr
viel leichter zu handhaben ist als die Riemannsche Variante, die wir hier kennen
gelernt haben.

Ende