IX. Die Geometrie des n-dimensionalen Raumes

Im weiteren Verlauf der Analysis-Vorlesung beschäftigen wir uns mit Funktionen von einem Bereich des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$, d.h. Funktionen von n Argumenten, deren Werte m Komponenten besitzen. Wir werden solche Funktionen auf Stetigkeit untersuchen, einen geeigneten Differenzierbarkeitsbegriff kennenlernen und sehen, wie man n-dimensionale Integrale und Volumina berechnet. Zuerst müssen wir uns dazu mit der geometrischen Struktur des $\mathbb{R}^n$ auseinandersetzen.

IX.1. Der n-dimensionale normierte Raum

Im folgenden steht $\mathbb{K}$ immer für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Konvexe Funktionen

Definition IX.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in D$ und alle $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Die Funktion f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist. ■

Geometrisch läßt sich die Eigenschaft der Konvexität so interpretieren, dass für $a < b$ in D der Graph von f unterhalb des Graphen der Sekanten durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft. In der Tat ist diese Sekante der Graph der affinen Funktion

$$S(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Für $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$ und $x \in]a, b[$ ist $\lambda \in]0, 1[$, $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ und

$$S(x) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Satz IX.1.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist. Ist f sogar zweimal differenzierbar, so ist f genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$ ist.*

Beweis. Ist f zweimal differenzierbar, so ist f' differenzierbar und da D ein Intervall ist, ist f' genau dann monoton wachsend, wenn $f'' \geq 0$ ist (Folgerung V.2.3). Wir haben daher nur die erste Behauptung zu zeigen.

Zuerst nehmen wir an, dass f' monoton wachsend ist und zeigen, dass dies die Konvexität von f zur Folge hat. Sei dazu o.B.d.A. $a < b$ und $0 < \lambda < 1$. Wir setzen $c := (1-\lambda)a + \lambda b$, so dass $a < c < b$ gilt. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren $\xi_1 \in]a, c[$ und $\xi_2 \in]c, b[$ mit

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Wegen $c - a = \lambda(b-a)$ und $b - c = (1-\lambda)(b-a)$ folgt daraus

$$(1-\lambda)(f(c) - f(a)) \leq \lambda(f(b) - f(c))$$

und durch Umstellen der Ungleichung erhalten wir

$$f(c) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Also ist f konvex.

Jetzt nehmen wir an, f sei konvex und zeigen, dass $f'(a) \leq f'(b)$ für $a < b$ in D gilt. Aus

$$\frac{f((1-\lambda)a + \lambda b) - f(a)}{\lambda(b-a)} \leq \frac{\lambda(f(b) - f(a))}{\lambda(b-a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

erhalten wir

$$f'(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f((1-\lambda)a + \lambda b) - f(a)}{\lambda(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Analog erhalten wir mit

$$\frac{f(b) - f((1-\lambda)a + \lambda b)}{(1-\lambda)(b-a)} \geq \frac{(1-\lambda)(f(b) - f(a))}{\lambda(b-a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

für $\lambda \to 1$ die Beziehung

$$f'(b) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq f'(a).$$ ■

Folgerung IX.1.3. *Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \geq 0$ die Ungleichung*

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Beweis. Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Behauptung trivial. Seien also $x, y > 0$. Dann ist die Behauptung äquivalent zu

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{1}{p}\log x} e^{\frac{1}{q}\log y} = e^{\frac{1}{p}\log x + \frac{1}{q}\log y} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Wegen $\exp'' = \exp > 0$ ist die Exponentialfunktion konvex und mit $\lambda = \frac{1}{q}$ und $1-\lambda = \frac{1}{p}$ ergibt sich daher die gewünschte Ungleichung sofort aus der Konvexität der Exponentialfunktion. ■

Aufgabe IX.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$.
(a) Zeigen Sie zunächst durch Rechnung: Ist f affin, d.h. existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = cx + d$ für alle $x \in D$, so ist f sowohl konvex als auch konkav.
(b) Warum folgt dies aus der geometrischen Interpretation der Konvexität?
(c) Ist f konvex und konkav, so ist f affin.
(d) Die Funktion f ist genau dann affin, wenn für alle $a, b \in D$ und alle $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

(e) Sind f_1 und f_2 konvex, so ist $f_1 + f_2$ konvex.
(f) Ist f konvex und $\lambda \geq 0$, so ist λf konvex. ■

Aufgabe IX.1.2. Zeigen Sie:
(a) Ist D ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvex sowie $x_0 \in D$ ein globales Maximum, so ist f konstant. Gehen Sie hierzu in folgenden Schritten vor:
(1) Es existieren $x_1 < x_0 < x_2$ in D mit $f(x_1), f(x_2) \leq f(x_0)$.
(2) $f(x_1) = f(x_2) = f(x_0)$. Hinweis: Wir schreiben x_0 als $x_0 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$.
(3) x_0 ist ein globales Minimum: Ist $x < x_0$, so schreibe man $x_0 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x$ und wende die Definition an. Es ergibt sich $f(x) \geq f(x_0)$. Analog verfährt man für $x > x_0$.
(4) f ist konstant.
(b) Auf dem Intervall $D := [0,1]$ existiert eine konvexe Funktion mit einem globalen Maximum, die nicht konstant ist.
(c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und konvex, so ist f konstant. Hinweis: Sei $f \leq M$ und $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$. Zu $\lambda \in]0,1[$ wähle x_3 so, dass $x_2 = \lambda x_3 + (1-\lambda)x_1$ gilt. Hieraus ergibt sich $f(x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda M$. Für $\lambda \to 0$ ergibt sich $f(x_2) \leq f(x_1)$. Die umgekehrte Ungleichung erhält man durch ein ähnliches Argument. ■

Normen auf $\mathbb{K}^n$

Definition IX.1.4. Für $p \geq 1$ definieren wir auf $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

und $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. ■

Wir wollen zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist. Dazu benötigen wir einige wichtige Ungleichungen.

Höldersche Ungleichung

Satz IX.1.5. *Seien* $p, q \in]1, \infty[$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Für alle* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q = \big(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(|y_1|^q + |y_2|^q + \ldots + |y_n|^q\big)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Ist $\|x\|_p = 0$, so ist $x = 0$ und die Behauptung trivial. Wir dürfen also $\|x\|_p \neq 0$ und $\|y\|_q \neq 0$ annehmen. Wir setzen

$$\alpha_j := \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} \quad \text{und} \quad \beta_j := \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Dann ist $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$. Wenden wir Folgerung IX.1.3 auf α_j und β_j an, so ergibt sich

$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_j|}{\|y\|_q} = \alpha_j^{\frac{1}{p}} \cdot \beta_j^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha_j}{p} + \frac{\beta_j}{q}.$$

Durch Summation über j erhalten wir

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |y_j| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$ ■

Bemerkung IX.1.6. (a) Für $p = q = 2$ ergibt sich die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |y_j| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2.$$

(b) Für $p = 1$ und $q = \infty$ gilt trivialerweise

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_j| = \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1.$$ ■

Minkowskische Ungleichung

Satz IX.1.7. *Für* $p \in [1, \infty]$ *gilt für alle* $x, y \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass x, y und $x + y$ jeweils nicht 0 sind, denn sonst ist die Ungleichung trivial. Dann gilt insbesondere

$$\|x\|_p, \|y\|_p, \|x + y\|_p > 0.$$

Für $p = 1$ und $p = \infty$ folgt dies sofort aus $|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j|$ für $j = 1, \ldots, n$. Sei nun $p \in]1, \infty[$ und q definiert durch $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Sei $z_j := |x_j + y_j|^{p-1}$. Dann ist $z_j^q = |x_j + y_j|^{pq-q} = |x_j + y_j|^p$, also $\|z\|_q = \|x + y\|_p^{p/q}$. Nach der Hölderschen Ungleichung gilt daher

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \cdot |z_j| &\le \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |z_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| \cdot |z_j| \\ &\le \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q = \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big) \cdot \|x + y\|_p^{p/q} \end{aligned}$$

Also ist $\|x + y\|_p = \|x + y\|_p^{p - p/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p$. ■

Für den folgenden Satz erinnern wir uns an den Begriff der Norm (Definition IV.2.5).

Satz IX.1.8. *Die Funktionen* $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ *sind für alle* $p \in [1, \infty]$ *Normen, d.h. sie haben die Normeigenschaften:*

(N1) $(\forall x \in \mathbb{K}^n)\ \|x\|_p \ge 0$ *und* $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$.

(N2) *Positive Homogenität:* $\|\lambda \cdot x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$ *für alle* $x \in \mathbb{K}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(N3) *Subadditivität:* $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ *für alle* $x, y \in \mathbb{K}^n$.

Beweis. Für $p = \infty$ ist die Behauptung trivial. Für $p < \infty$ sind die Aussagen (N1) und (N2) ebenfalls trivial. Der einzige nichttriviale Teil ist die Subadditivität und das ist die Minkowski-Ungleichung. ■

Für jedes $p \ge 1$ erhalten wir also auf $\mathbb{K}^n$ die Struktur eines normierten Raumes $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, und aus Lemma IV.2.7 erhalten wir somit Metriken auf $\mathbb{K}^n$ durch

$$d_p(x, y) := \|x - y\|_p = \Big(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

für $x, y \in \mathbb{K}^n$.

Die Norm $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ heißt *Maximumnorm.*

Die Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ heißt *euklidische Norm.* Die zugehörige Metrik $d_2(x, y) := \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$ heißt *euklidischer Abstand.*

Bezüglich der p-Normen sehen die „Einheitskugeln“ im $\mathbb{R}^2$, d.h. die Mengen $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$, recht verschieden aus. Um das einzusehen, skizziere man sie für $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$ und für jeweils ein weiteres $p \in]1, 2[$ bzw. $p > 2$.

Für viele Zwecke ist die euklidische Norm am zweckmäßigsten, beispielsweise für geometrische Überlegungen. Für komplexe Zahlen haben wir

$$|x + iy| = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Satz IX.1.9. *Sei* $1 \leq p \leq \infty$.

(1) *Eine Folge in* $(\mathbb{K}^n, d_p)$ *konvergiert genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert. Insbesondere hängt dies nicht von* p *ab.*

(2) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ *ist ein Banachraum, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Beweis. (1) Sei $(z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^n$ und

$$z^{(m)} = (z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}).$$

Gilt $\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = z$, d.h. $\|z^{(m)} - z\|_p \to 0$, so gilt für alle j die Beziehung $|z_j^{(m)} - z_j| \leq \|z^{(m)} - z\|_p \to 0$, also $z_j^{(m)} \to z_j$ für jedes j, d.h., die Folge konvergiert komponentenweise.

Gilt andererseits $z_j^{(m)} \to z_j$ für jedes j, so gilt auch

$$\|z^{(m)} - z\|_p = \Big(\sum_{j=1}^n |z_j^{(m)} - z_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

d.h. $\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = z$.
(2) Sei $(z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$. Wegen

$$|z_j^{(m)} - z_j^{(n)}| \leq \|z^{(m)} - z^{(n)}\|_p$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist dann auch jede Komponentenfolge $(z_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, also konvergent (Folgerung III.2.33). Wegen (1) ist damit auch die Folge $(z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent. ∎

Beispiele IX.1.10. (a) Die Folge $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $x^{(m)} = \big(\frac{1}{2^m}, 1 - \frac{1}{2^m}\big)$ konvergiert komponentenweise gegen $(0, 1)$, also auch bzgl. jeder der Normen $\|\cdot\|_p$.
(b) Die Folge $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $x^{(m)} = \big(2^m, 1 + \frac{1}{m}\big)$ konvergiert nicht komponentenweise, denn die erste Komponentenfolge kovergiert nicht. Also konvergiert sie bzgl. keiner der Normen $\|\cdot\|_p$. ∎

IX.2. Mehr über metrische Räume

Im nächsten Abschnitt werden wir das grundlegende Konzept der Kompaktheit kennenlernen, das hinter vielen Existenzsätzen der Analysis steht. Um dieses Konzept in der angemessenen Allgemeinheit einführen zu können, müssen wir unsere Kenntnisse über metrische Räume etwas vertiefen.

Definition IX.2.1. (Vgl. Definition III.1.5) Sei (X, d) ein metrischer Raum.
(a) Für $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(p) := \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$$

die ε*-Umgebung von* p oder die *offene Kugel vom Radius* ε *um* p.
(b) Eine *Umgebung von* p ist eine Teilmenge $U \subseteq X$, für die ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$ existiert. Man beachte, dass für jede Umgebung U des Punkte p auch jede Obermenge $V \supseteq U$ eine Umgebung von p ist.
(c) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h.

$$(\forall p \in U)(\exists \varepsilon > 0)\, U_\varepsilon(p) \subseteq U.$$

(d) Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus F$ offen ist. ■

Bemerkung IX.2.2. (1) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so sind die offenen Kugeln bzgl. der zugehörigen Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ gegeben durch

$$U_\varepsilon(p) = \{x \in V \colon \|x-p\| < \varepsilon\}.$$

(2) Offene Kugeln, d.h. Mengen der Gestalt $U_r(p)$, $r > 0$, in einem metrischen Raum (X,d) sind offen im Sinne von Definition IX.2.1(d) (Lemma III.1.6). ■

Satz IX.2.3. (Eigenschaften offener Mengen, Satz III.1.7) *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(O1) $\emptyset$ *und* X *sind offen.*

(O2) *Sind* $U_1, \ldots, U_n$ *offene Mengen, so ist auch* $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ *offen.*

(O3) *Ist* $(U_j)_{j\in J}$ *eine Familie offener Teilmengen von* X, *so ist auch* $\bigcup_{j\in J} U_j$ *offen.* ■

Folgerung IX.2.4. (Eigenschaften abgeschlossener Mengen) *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum.*

(A1) $\emptyset$ *und* X *sind abgeschlossen.*

(A2) *Sind* $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ *abgeschlossen, so ist auch* $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ *abgeschlossen.*

(A3) *Ist* $(A_j)_{j\in J}$ *eine Familie abgeschlossener Teilmengen von* X, *so ist auch* $\bigcap_{j\in J} A_j$ *abgeschlossen.*

Beweis. Man wendet IX.2.3 auf die Komplemente an. Wir führen beispielhaft einen Beweis von (A2). Sind die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen, so sind die Mengen $U_j := X \setminus A_j$, $j = 1, \ldots, n$, offen. Nach (O2) ist dann

$$U_1 \cap \ldots \cap U_n = X \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$$

offen, also $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ abgeschlossen. (A1) ist trivial, und (A3) zeigt man analog zum gerade durchgeführten Beweis von (A2). ■

Beispiel IX.2.5. (a) Die Intervalle $U_n :=]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[\subseteq \mathbb{R}$ sind offen, aber ihr Schnitt $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = [0,1]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$. Die Bedingung (O2) gilt also im allgemeinen nicht für unendliche Durchschnitte.
(b) Die Intervalle $A_n := [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}$ sind abgeschlossen, aber $\bigcup_{n=1}^\infty A_n =]0,1[$ ist nicht abgeschlossen. Die Bedingung (F2) gilt also im allgemeinen nicht für unendliche Vereinigungen. ■

Definition IX.2.6. Sei (X,d) ein metrischer Raum $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) Die Menge

$$\overline{M} := \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ abgeschlossen}, M \subseteq F\}$$

heißt *Abschluß von M.* Wegen (A3) ist $\overline{M}$ abgeschlossen. Die Menge $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält. Man nennt sie daher auch die *abgeschlossene Hülle von M.*

(b) Die Menge

$$M^\circ := \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ offen}, U \subseteq X\}$$

heißt das *Innere* oder der *offene Kern von M.* Nach (O3) ist M° eine offene Teilmenge von X. Sie ist die größte offene Teilmenge, die in M enthalten ist.

(c) Die Menge

$$\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$$

heißt *Rand von M.* ∎

Mit den obigen Definitionen gelten folgende Beziehungen:

$$M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M} = M^\circ \cup \partial M,$$

$$M \text{ offen} \iff M = M^\circ \iff \partial M \cap M = \emptyset$$

und

$$M \text{ abgeschlossen} \iff M = \overline{M} \iff \partial M \subseteq M.$$

Satz IX.2.7. *Sei M eine Teilmenge des metrischen Raumes (X,d) und $p \in X$. Dann gelten:*

(1) $p \in \overline{M} \iff$ *jede Umgebung von p schneidet M.*

(2) $p \in M^\circ \iff$ *M ist Umgebung von p.*

(3) $p \in \partial M \iff$ *jede Umgebung von p schneidet M und $X \setminus M$.*

Beweis. (1) Ist $x \notin \overline{M}$, so ist $X \setminus \overline{M}$ eine offene Menge, die x enthält, und damit eine Umgebung von x, die M nicht schneidet.

Ist andererseits $x \in X$ ein Punkt, der eine Umgebung U besitzt, die M nicht schneidet, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq U$. Da $U_\delta(x)$ offen ist, ist $X \setminus U_\delta(x)$ eine abgeschlossene Menge, die M enthält, und daher ist $\overline{M} \subseteq X \setminus U_\delta(x)$. Insbesondere ist $x \notin \overline{M}$.

(2) Ist $p \in M^\circ$, so ist die offene Menge M° eine Umgebung von p, also M ebenfalls. Für die Umkehrung sei M Umgebung von p. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq M$. Da $U_\varepsilon(p)$ offen ist, gilt $U_\varepsilon(p) \subseteq M^\circ$. Folglich ist $p \in M^\circ$.

(3) Wegen $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ und (1) und (2) besteht ∂M aus denjenigen Punkten p von X, für die jede Umgebung die Menge M schneidet, aber nicht in M enthalten ist, d.h. auch $X \setminus M$ schneidet. ∎

Folgerung IX.2.8. *Es gilt genau dann $p \in \overline{M}$, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M existiert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist $p \in \overline{M}$, so existiert nach Satz IX.2.7(1) zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x_n \in U_{1/n}(p) \cap M$. Damit ist $d(x_n, p) < \frac{1}{n}$, also $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.
„$\Leftarrow$": Ist $p \notin \overline{M}$, so existiert nach Satz IX.2.7(1) ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \cap M = \emptyset$. Also kann in M keine Folge (x_n) existieren, die gegen p konvergiert. ■

Beispiele IX.2.9. (1) Wir betrachten zunächst den metrischen Raum $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$.
(a) Für die Menge $M = [0,1[$ verifiziert man direkt mit Satz X.2.7:

$$M^0 =]0,1[, \qquad \overline{M} = [0,1] \quad \text{und} \quad \partial M = \{0,1\}.$$

(b) Für die Menge $M = [0,1]$ erhalten wir ebenfalls mit Satz X.2.7:

$$M^0 =]0,1[, \qquad \overline{M} = [0,1] = M \quad \text{und} \quad \partial M = \{0,1\}.$$

(c) Für die Menge $M = \mathbb{R}$ erhalten wir

$$M^0 = \mathbb{R}, \qquad \overline{M} = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \partial M = \emptyset.$$

(d) Für $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist

$$M^0 = \emptyset, \qquad \overline{M} = M \cup \{0\} \quad \text{und} \quad \partial M = M.$$

(2) Die Konzepte: Inneres, Rand, Abschluß hängen ganz wesentlich von dem Raum X ab, in dem man die Menge M betrachtet. Hier ist ein instruktives Beispiel:

In dem metrischen Raum $X = [0,1]$ mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ erhalten wir für die Teilmenge $M = X$:

$$M = M^0 = \overline{M} \quad \text{und} \quad \partial M = \emptyset.$$

Für dieselbe Menge M, betrachtet als Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{R}, d)$, haben wir unter (b) ganz andere Eigenschaften terhalten.
(3) Für $X = \mathbb{R}^2$ mit $d(a,b) = \|a-b\|_\infty = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$ und

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\} = [0,1[\times[0,1[$$

(Skizze!), erhalten wir

$$\begin{aligned} M^0 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} =]0,1[\times]0,1[\\ \overline{M} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\} = [0,1] \times [0,1] \\ \partial M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| \le 1, |y| = 1) \ \text{ oder } \ (|x| = 1, |y| \le 1)\}. \end{aligned}$$

■

Aufgabe IX.2.1. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und

$$B = \{v \in V \colon \|v\| \leq 1\},$$

so gelten $B^\circ = U_1(0) = \{v \in V \colon \|v\| < 1\}$, $\overline{B} = B$ und $\partial B = \{v \in V \colon \|v\| = 1\}$. ■

Aufgabe IX.2.2. (a) Für $X = \mathbb{R}$ gilt $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ und für $X = \mathbb{Q}$ gilt $\partial\mathbb{Q} = \emptyset$.
(b) Für $X = \mathbb{R}$ und $a < b$ gelten $[a,b]^\circ =]a,b[$ und $\overline{[a,b[} = [a,b]$. ■

Aufgabe IX.2.3. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge, so gilt

$$X \setminus \overline{M} = (X \setminus M)^0. \qquad ■$$

Aufgabe IX.2.4. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert genau dann gegen $p \in X$, wenn für jede Umgebung U von p ein $N_U \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U$ für alle $n > N_U$ gilt. ■

Aufgabe IX.2.5. Sind $A \subseteq \mathbb{R}^k$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, so ist die Menge $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ abgeschlossen. ■

Aufgabe IX.2.6. Sei A eine abgeschlossen Teilmenge des metrischen Raums (X, d_X) und B eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums (A, d_A), wobei $d_A := d|_{A\times A}$ die eingeschränkte Metrik ist. Dann ist B auch in (X, d) abgeschlossen. ■

IX.3. Kompaktheit

In diesem Abschnitt behandeln wir den Begriff der kompakten Teilmenge eines metrischen Raumes und das Verhalten von stetigen Funktionen auf kompakten Mengen (Satz vom Maximum, gleichmäßige Stetigkeit). Wir erhalten hierbei von einem abstrakten Standpunkt aus Sätze, die wir schon für den Spezialfall von Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen in der Analysis I kennengelernt haben.

Definition IX.3.1. Sei A eine Teilmenge des metrischen Raums (X, d).

(a) Eine *offene Überdeckung* von A ist eine Familie $(U_j)_{j\in J}$ offener Teilmengen von X mit $\bigcup_{j\in J} U_j \supseteq A$.

(b) A heißt *kompakt*, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von A eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $\bigcup_{j\in F} U_j \supseteq A$ existiert. Man nennt $(U_j)_{j\in F}$ dann eine *endliche Teilüberdeckung*. ■

Man beachte, dass in der Definition der Kompaktheit *nicht* verlangt wird, dass A eine endliche offene Überdeckung besitzt, sondern dass jede offene Überdeckung eine solche enthält. Die Eigenschaft, die unter (b) von einer kompakten Menge gefordert wird, heißt die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft*.

Wir machen uns zuerst etwas mit dem Kompaktheitsbegriff vertraut.

Satz IX.3.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $p \in X$ konvergiert. Dann ist die Menge*

$$A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$$

kompakt.

Beweis. Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert ein $j_0 \in J$ mit $p \in U_{j_0}$. Da U_{j_0} eine Umgebung von p ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U_{j_0}$ und weiter ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\varepsilon(p) \subseteq U_{j_0}$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Wir wählen nun zu jedem $n < n_0$ ein j_n mit $x_n \in U_{j_n}$. Für $F := \{j_n : n < n_0\} \cup \{j_0\}$ ist dann $A \subseteq \bigcup_{j\in F} U_j$. Wir haben somit gezeigt, dass *jede* offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält. Also ist A kompakt. ∎

Beispiel IX.3.3. Der Satz besagt insbesondere, dass die Teilmenge

$$\Big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$$

kompakt ist. Beachte dabei, dass die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ *nicht* kompakt ist: Die Intervalle $(\,]\varepsilon, 2[\,)_{\varepsilon>0}$ bilden eine offene Überdeckung, die *keine* endliche Teilüberdeckung enthält. ∎

Definition IX.3.4. Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ und die zugehörige Metrik $d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty$. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j$ für alle $j = 1\ldots, n$ heißt

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall j = 1, \ldots, n)\, a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

ein *Quader*. Die Menge

$$[(-1, 1), (1, 2)] = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, 1 \leq x_2 \leq 2\}$$

ist ein Beispiel eines Quaders. Für eine Teilmenge A des metrischen Raums (X, d) heißt

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, \infty]$$

der *Durchmesser von A* (engl.: diameter). Die Mente A heißt *beschränkt*, wenn ihr Durchmesser endlich ist. Ist $[a, b]$ ein Quader in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, so ist

$$\operatorname{diam}([a, b]) = \|b - a\|_\infty = \max\{b_j - a_j : j = 1 \ldots n\},$$

denn für alle $x, y \in [a, b]$ und alle $j = 1\ldots, n$ gilt $x_j, y_j \in [a_j, b_j]$, also $|x_j - y_j| \leq b_j - a_j$ für alle j und daher $\|x - y\|_\infty \leq \|b - a\|_\infty$. Man verifiziert leicht, dass jeder Quader Q eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist (vgl. Folgerung IX.2.8). ∎

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zu einem wichtigen Lemma.

Lemma IX.3.5. *In $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist jeder Quader $[a,b]$ kompakt.*

Beweis. Wie beweisen die Kompaktheit von $[a,b]$ indirekt. Sei dazu $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von $Q_0 := [a,b]$, von der wir annehmen, dass sie keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wie werden induktiv eine Folge $Q_m, m \in \mathbb{N}$, von Quadern mit $\mathrm{diam}(Q_m) = \frac{1}{2^m}\|b-a\|_\infty$ konstruieren, die sich nicht durch endlich viele U_j überdecken lassen und ineinander liegen, d.h.

$$Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \ldots \supseteq Q_{m-1} \supseteq Q_m \supseteq \ldots$$

gelten. Sei Q_m schon konstruiert und $Q_m = [c,d]$. Wir zerlegen Q_m in 2^n Teilquader der gleichen Größe:

$$Q_m^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)} := [c^\varepsilon, d^\varepsilon], \quad \varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Dabei sei

$$c_j^\varepsilon := c_j + \varepsilon_j \frac{d_j - c_j}{2} \quad \text{und} \quad d_j^\varepsilon := c_j^\varepsilon + \frac{d_j - c_j}{2}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung läßt sich Q_m nicht durch endlich viele U_j überdecken; also existiert auch ein $Q_m^{\varepsilon_0}$ mit dieser Eigenschaft, denn sonst würde sich

$$Q_m = \bigcup_\varepsilon Q_m^\varepsilon$$

entgegen der Voraussetzung mit endlichen vielen Mengen U_j überdecken lassen. Wir setzen $Q_{m+1} := Q_m^{\varepsilon_0}$ und beachten

$$\mathrm{diam}(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(Q_m) = \frac{1}{2^{m+1}}\|b-a\|_\infty.$$

Die Folge $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die wir so induktiv erhalten, besitzt nun die gewünschten Eigenschaften.

Sei jetzt $x_m \in Q_m$ beliebig. Dann ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, denn für $n \geq m$ ist

$$d_\infty(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(Q_m) \leq \frac{1}{2^m}\|b-a\|_\infty.$$

Wegen Satz IX.1.9 über die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ konvergiert diese Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$. Da alle Q_m abgeschlossen sind (Aufgabe IX.2.5), gilt $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in Q_m$, da $x_n \in Q_m$ für alle $n \geq m$. Sei nun $j_0 \in J$ mit $x \in U_{j_0}$. Da U_{j_0} offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U_{j_0}$. Für $\mathrm{diam}(Q_m) < \varepsilon$ ist dann auch $Q_m \subseteq U_\varepsilon(x) \subseteq U_{j_0}$, was einen Widerspruch zur Konstruktion von Q_m darstellt. ∎

Satz IX.3.6. *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

(1) *Ist $A \subseteq X$ kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen.*

(2) *Ist (X,d) kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.*

Beweis. (1) Sei o.B.d.A. $A \neq \emptyset$ und $a \in A$. Dann ist das System $\big(U_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ der offenen Kugeln vom Radius n um a eine offene Überdeckung von A, hat also eine endliche Teilüberdeckung: Es gibt $n_1, \ldots, n_k$ mit $A \subseteq U_{n_1}(a) \cup \ldots \cup U_{n_k}(a)$. Für $n := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ gilt dann sogar $A \subseteq U_n(a)$. Insbesondere ist

$$\operatorname{diam}(A) \leq 2n,$$

d.h., A ist beschränkt.

Um die Abgeschlossenheit von A zu zeigen, sei $a \notin A$. Wir zeigen $a \notin \overline{A}$; hieraus folgt dann $\overline{A} \subseteq A$ und somit die Abgeschlossenheit von A. Das System der Mengen $V_n := \{x \in X \colon d(x,a) > \frac{1}{n}\}$ ist eine offene Überdeckung von A, hat also eine endliche Teilüberdeckung. Da diese Mengen alle ineinander enthalten sind, gibt es folglich eine Zahl n_0 mit $A \subseteq V_{n_0}$. Dann ist $U_{1/n_0}(a) \cap A = \emptyset$ und daher $a \notin \overline{A}$; es folgt $\overline{A} \subseteq A$ und damit die Abgeschlossenheit von A.

(2) Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von A. Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen, also $(X \setminus A) \cup \bigcup_{j\in J} U_j = X$, d.h. $X \setminus A$ bildet zusammen mit den Mengen U_j, $j \in J$, eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{j\in F} U_j$. Damit ist $(U_j)_{j\in F}$ eine endliche Teilüberdeckung von A. ∎

Folgerung IX.3.7. *In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Nach Satz IX.3.2 ist $A := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt, also beschränkt nach Satz IX.3.6. ∎

SATZ VON HEINE-BOREL

Theorem IX.3.8. *Eine Teilmenge A des metrischen Raums $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Ist A kompakt, so ist A nach Satz IX.3.6(1) abgeschlossen und beschränkt. Ist andererseits A beschränkt, so ist A in einem ausreichend großen Quader Q enthalten. Ist A zusätzlich in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ abgeschlossen, so ist A in (Q, d_∞) abgeschlossen (Aufgabe IX.2.6), also kompakt nach Satz IX.3.6(2), da (Q, d_∞) nach Lemma IX.3.5 kompakt ist. ∎

Der folgende Satz ist die abstrakte Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß, den wir schon für $\mathbb{R}$ kennen.

SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS

Satz IX.3.9. *Sei A eine kompakte Teilmenge des metrischen Raums (X, d). Dann hat jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A eine Teilfolge, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert.*

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, keine Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $a \in A$. Wir behaupten, dass für jedes

$a \in A$ eine Umgebung U_a existiert, für die die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_a\}$ endlich ist.

Ist dies für ein $a \in A$ nicht der Fall, so finden wir zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_m > m$ mit $x_{n_m} \in U_{1/m}(a)$. Dann bilden diese x_{n_m} eine gegen a konvergente Teilfolge, was nach unserer Annahme nicht sein kann.

Nun ist $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$, und da A kompakt ist, existieren $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $A \subseteq U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Damit liegen in A nur endlich viele Folgenglieder, und dies ist ein Widerspruch. ■

Von Satz IX.3.9 gilt auch die Umkehrung: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt (siehe J. Jost, “Postmodern Analysis”, Theorem 7.38).

Folgerung IX.3.10. *Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Das folgt aus Satz IX.3.9, da die Folge in einem (ausreichend großen) Quader enthalten ist, und dieser nach Lemma IX.3.5 kompakt ist. ■

Kompaktheit und Stetigkeit

Wir kommen nun zu den Anwendungen des Konzepts der Kompaktheit auf stetige Abbildungen. Zuerst eine kleine Wiederholung zur Stetigkeit (siehe Satz IV.1.3 und Satz IV.1.4).

Satz IX.3.11. (a) *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) sind äquivalent:*

(1) *Die Funktion f ist stetig in p.*

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, f\big(U_\delta(p)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(p)\big)$.

(3) *Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ in X folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ in Y.*

(b) *f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.* ■

Satz IX.3.12. *Ist $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ kompakt, so ist auch $f(A) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis. Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist die Familie $\big(f^{-1}(U_j)\big)_{j \in J}$ in X eine offene Überdeckung von A (beachte, dass $f^{-1}(U_j)$ wegen der Stetigkeit von f offen ist). Damit existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $A \subseteq \bigcup_{j \in F} f^{-1}(U_j)$. Dann ist $f(A) \subseteq \bigcup_{j \in F} f\big(f^{-1}(U_j)\big) \subseteq \bigcup_{j \in F} U_j$, d.h., das System $(U_j)_{j \in F}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $f(A)$. ■

Lemma IX.3.13. *Ist $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge, so besitzt A ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis. Nach dem Satz von Heine-Borel ist A abgeschlossen und beschränkt. Wir zeigen nun $\sup A, \inf A \in A$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $a \in A$ mit $a > \sup A - \varepsilon$. Also ist $a \in U_\varepsilon(\sup A)$ und somit $\sup A \in \overline{A} = A$ (Satz IX.2.7(1)). Für das Infimum argumentiert man analog. ■

Aufgabe IX.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $D = [a, b]$. ■

Satz vom Maximum

Satz IX.3.14. *Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt die Funktion f ein Maximum und ein Minimum an, d.h., es existieren Elemente $x, y \in X$ mit $f(x) = \min f(X)$ und $f(y) = \max f(X)$.*

Beweis. (Siehe Satz IV.1.12) Nach Satz IX.3.12 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, besitzt also nach Lemma IX.3.13 Maximum und Minimum. ■

Folgerung IX.3.15. *Sei $A \subseteq X$ kompakt und $a \in X$. Dann enthält A einen Punkt x kleinsten Abstands von a, d.h., es gilt*

$$d(a, x) = \min\{d(a, y) \colon y \in A\}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(a, y)$. Dann ist f stetig, da $|f(y_1) - f(y_2)| = |d(a, y_1) - d(a, y_2)| \leq d(y_1, y_2)$ gilt (Aufgabe III.1.1). Also nimmt f nach Satz IX.3.14 ein Minimum an. ■

Bemerkung IX.3.16. (a) Ist A nicht abgeschlossen (und damit auch nicht kompakt), so wird die Behauptung von Satz IX.3.14 in der Regel falsch, denn für jeden Punkt $p \in \overline{A} \setminus A$ ist $d(p, x) > 0$ für alle $x \in A$. Also ist

$$f \colon A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{d(x, p)}$$

eine stetige Funktion, die auf A unbeschränkt ist, denn es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $x_n \to p$, d.h. $d(p, x_n) \to 0$.
(b) Punkte kleinsten Abstands von einer Menge sind in der Regel nicht eindeutig. Hierzu betrachten wir $X = \mathbb{R}^2$ mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$ und $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_\infty \leq 1\}$ sowie den Punkt $a = (2, 0)$. Man verifiziert leicht, dass $d(a, x) \geq 1$ für alle $x \in A$ gilt. Für alle Punkt $x = (1, x_2)$ mit $|x_2| \leq 1$ ist allerdings $x \in A$ und $d(x, a) = 1$. Warum tritt dieser Effekt nicht für die Metriken d_p, $p \in]1, \infty[$ auf? Man konstruiere ein ähnliches Beispiel für $p = 1$. ■

Wir erinnern uns, dass eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen *gleichmäßig stetig* heißt, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall p, q \in X) \qquad d_X(p, q) < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(p), f(q)\big) < \varepsilon.$$

Ist die Funktion f *Lipschitz-stetig*, d.h. existiert ein $L \geq 0$, so dass für alle $p, q \in X$ gilt

$$d_Y\big(f(p), f(q)\big) \leq L \cdot d_X(p, q),$$

so ist f gleichmäßig stetig (setze $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$).

Lemma IX.3.17. *Ist* $\|\cdot\|$ *eine Norm auf dem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* V*, so gilt:*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Beweis. Da $d(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf V definiert, folgt dies aus $|d(x,0) - d(y,0)| \leq d(x,y)$ (Aufgabe III.1.1). ∎

Bemerkung IX.3.18. (a) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist die Normfunktion $f : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ Lipschitz-stetig mit $L = 1$, denn wegen Lemma IX.3.17 gilt $\big|f(v) - f(w)\big| \leq \|v - w\|$.
(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in D$. Dann ist f Lipschitz-stetig. Dies folgt aus dem Mittelwertsatz; ihm zufolge gibt es zu $x < y$ in D ein $z \in]x, y[$ mit $|f(y) - f(x)| = |f'(z)| \cdot |y - x| \leq M|y - x|$.
(c) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so betrachten wir die Distanzfunktion

$$d_A(x) := \inf\{d(x,a) \colon a \in A\}.$$

Wir behaupten, dass d_A Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$ ist. Für $x, y \in X$ und $a \in A$ gilt zunächst $d(x,a) \leq d(y,a) + d(x,y)$ und daher $d_A(x) \leq d(y,a) + d(x,y)$, somit $d_A(x) \leq d_A(y) + d(x,y)$. Aus Symmetriegründen gilt auch $d_A(y) \leq d_A(x) + d(x,y)$ und daher

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y).$$

Also ist d_A Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$, insbesondere gleichmäßig stetig. ∎

Satz von der gleichmässigen Stetigkeit

Satz IX.3.19. *Ist* X *ein kompakter metrischer Raum und* $f : X \to Y$ *eine stetige Funktion, so ist* f *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $\delta_x > 0$ mit $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $d_X(x,y) < \delta_x$. Nun ist $\big(U_{\delta_x/2}(x)\big)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existieren

$$x_1, \ldots, x_n \in X \quad \text{mit} \quad X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\delta_{x_j}/2}(x_j).$$

Sei $\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$ und $y, z \in X$ mit $d_X(y,z) < \delta$. Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $d_X(y, x_j) < \frac{1}{2}\delta_{x_j}$. Also ist auch

$$d_X(z, x_j) < \delta + d_X(y, x_j) < 2\tfrac{1}{2}\delta_{x_j} = \delta_{x_j}.$$

Somit sind $y, z \in U_{\delta_{x_j}}(x_j)$. Es folgt nun

$$d_Y\big(f(y), f(z)\big) \leq d_Y\big(f(y), f(x_j)\big) + d_Y\big(f(x_j), f(z)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad ∎$$

IX.4. Stetige Funktionen und lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst einige spezielle Aspekte stetiger Abbildungen in mehreren Veränderlichen diskutieren. Danach werden wir die Stetigkeitseigenschaften linearer Abbildungen betrachten.

Stetige Funktionen auf $\mathbb{K}^n$

Definition IX.4.1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sowie $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Wir haben in Satz IV.1.3(3) das Folgenkriterium für die Stetigkeit von f kennengelernt: Die Abbildung f ist genau dann stetig in $p \in X$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ die Beziehung $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ in Y gilt. Im folgenden schreiben wir dies abkürzend als:

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p). \qquad \blacksquare$$

Lemma IX.4.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $\mathbb{K}^m$ sei versehen mit einer der Metriken d_p, $p \in [1, \infty]$. Eine Abbildung*

$$f = (f_1, \ldots, f_m)\colon X \to \mathbb{K}^m$$

ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen $f_j\colon X \to \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, m$, stetig sind.

Beweis. Sei

$$q_j\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m) \to x_j$$

die Projektion auf die j-te Komponente. Dann ist q_j stetig, denn nach Satz IX.1.9 gilt

$$\lim_{x\to p} x_j = p_j = q_j(p) = \lim_{x\to p} q_j(x)$$

für alle $p \in \mathbb{K}^m$.

Ist nun $f\colon X \to \mathbb{K}^m$ stetig, so sind auch die Kompositionen $f_j = q_j \circ f$ stetig (Satz IV.1.5).

Sind andererseits alle Funktionen $f_j\colon X \to \mathbb{K}$ stetig, $p \in X$, und gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ in X, so gilt $f_j(x_n) \to f_j(p)$ für alle j und daher nach Satz IX.1.4:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f_1(x_n), \ldots, f_m(x_n)) = (f_1(p), \ldots, f_m(p)) = f(p).$$

Also ist f in p stetig. $\blacksquare$

Lemma IX.4.3. *Sei* $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$. *Folgende Abbildungen sind stetig:*

(i) $\mathrm{add}\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y$.

(ii) $\mathrm{mult}\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy$.

(iii) $\mathrm{quot}\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy^{-1}$.

Beweis. (i), (ii) Sei $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ und $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^2$, die gegen (x, y) konvergiert, d.h. $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dann gilt auch $x_n + y_n \to x + y$ und $x_n y_n \to xy$. Also sind die Abbildungen add und mult stetig.
(iii) Wir nehmen jetzt zusätzlich an, dass $y \neq 0$ ist und $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann erhalten wir auch $x_n y_n^{-1} \to xy^{-1}$ (Satz III.2.13), d.h., die Abbildung quot ist stetig. ∎

Folgerung IX.4.4. *Ist* (X, d) *ein metrischer Raum und sind* $f, g, h\colon X \to \mathbb{K}$ *stetig mit* $h(X) \subseteq \mathbb{K}^\times$, *so sind die Funktionen*

$$f + g\colon X \to \mathbb{K}, \quad f \cdot g\colon X \to \mathbb{K} \quad \textit{und} \quad \frac{f}{h}\colon X \to \mathbb{K}$$

stetig.

Beweis. Zunächst ist die Abbildung $(f, g)\colon X \to \mathbb{K}^2$ gemäß Lemma IX.4.2 stetig. Also ist $f + g = \mathrm{add} \circ (f, g)$ stetig, da add stetig ist (Lemma IX.4.3) und Kompositionen stetiger Abbildungen stetig sind (Satz IV.1.5). Analog erhalten wir die Stetigkeit von $f \cdot g = \mathrm{mult} \circ (f, g)$ und $\frac{f}{h} = \mathrm{quot} \circ (f, h)$. ∎

Beispiel IX.4.5. Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad f(x) = x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

heißt *Monom vom Exponenten* α. Eine Funktion der Gestalt

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha$$

heißt *Polynomfunktion vom Grad* k, wenn ein α mit $|\alpha| = k$ und $c_\alpha \neq 0$ existiert. Durch sukzessives Anwenden von Folgerung IX.4.4 erhalten wir unmittelbar die Stetigkeit aller Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. ∎

Bemerkung IX.4.6. (Richtungsgrenzwerte und Stetigkeit) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $p \in U^\circ$ ein innerer Punkt von U. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$, und folglich gilt $p + hv \in U$ für $|h| < \frac{\varepsilon}{\|v\|}$. Falls er existiert, heißt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(p + hv)$$

der *Richtungsgrenzwert von* f *in Richtung* v.

Ist f stetig, so folgt aus $h_n \to 0$ sofort $p + h_n v \to p$, und wir erhalten

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(p + hv) = f(p)$$

für alle Richtungen v. Man könnte nun glauben, dass die Existenz und Gleichheit der Richtungsgrenzwerte mit $f(p)$ für alle Richtungen auch umgekehrt die Stetigkeit der Funktion f im Punkt p impliziert. Das ist aber falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Wir betrachten hierzu auf $U = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \text{ oder } y \neq x^2 \\ 1 & \text{falls } y = x^2 \neq 0. \end{cases}$$

Für $p = (0,0)$ ist dann $f(0,0) = 0$ und

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(hv) = 0 = f(0,0)$$

für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, denn ist $v = (v_1, v_2)$, so gilt $hv_2 \neq h^2 v_1^2$ für alle ausreichend kleinen h (Nachweis!). Andererseits ist die Funktion f in p nicht stetig, da

$$1 = f\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\Big) \not\to f(0,0) = 0$$

gilt. ■

Beispiel IX.4.7. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Diese Funktion ist in $(0,0)$ unstetig, denn

$$\lim_{n \to \infty} f\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0.$$

Für diese Funktion existieren die Richtungsgrenzwerte für alle Richtungen $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(hv) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{h^2 v_1 v_2}{h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

d.h., der Richtungsgrenzwert hängt von der Richtung ab und stimmt in der Regel nicht mit dem Funktionswert $f(0,0)$ überein. ■

Stetigkeit und lineare Abbildungen

Definition IX.4.8. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum V heißen *äquivalent*, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, wenn

$$(\exists c, C > 0)(\forall v \in V) \quad c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe IX.4.1. Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass durch $\sim$ auf der Menge $\mathcal{N}$ aller Normen auf V eine Äquivalenzrelation gegeben ist. ■

Satz IX.4.9. *Alle Normen auf* $\mathbb{R}^n$ *sind äquivalent.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass alle Normen zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent sind, denn die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation (Aufgabe IX.4.1). Sei $e_j := (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ derjenige Vektor, der an der j-ten Stelle eine 1 besitzt, und $e_1,\ldots,e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Sei weiter $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|e_j\| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n \|e_j\|.$$

Sei $C := \sum_{j=1}^n \|e_j\|$. Die Norm $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig, denn es gilt

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \leq C \cdot \|x-y\|_\infty.$$

Die Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_\infty = 1\} = \partial U_1^\infty(0)$$

ist abgeschlossen und beschränkt, also nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Da $\|\cdot\|$ auf S stetig ist, existiert $c := \min\{\|y\| : \|y\|_\infty = 1\} > 0$. Für $y \neq 0$ ist dann

$$\|y\| = \left\|\frac{y}{\|y\|_\infty} \cdot \|y\|_\infty\right\| = \|y\|_\infty \cdot \left\|\frac{y}{\|y\|_\infty}\right\| \geq \|y\|_\infty \cdot c.$$

Insgesamt folgt

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \ c\|y\|_\infty \leq \|y\| \leq C \cdot \|y\|_\infty. \qquad \blacksquare$$

Folgerung IX.4.10.

(i) *Der Raum* $\mathbb{R}^n$ *ist bezüglich jeder Norm vollständig.*

(ii) *Alle Normen liefern auf* $\mathbb{R}^n$ *die gleichen offenen Mengen.*

(iii) *Die Stetigkeit einer Abbildung* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *oder* $g : \mathbb{R}^n \to Y$*, wobei* X *und* Y *metrische Räume sind, hängt nicht von der Wahl der Norm auf* $\mathbb{R}^n$ *ab.*

Beweis. (i) Zwei äquivalente Normen haben die gleichen Cauchy-Folgen. Die Behauptung folgt also aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ und Satz IX.4.9.

(ii) Wir zeigen, dass äquivalente Normen die gleichen Umgebungen und daher auch die gleichen offenen Mengen definieren: Es gelte

$$c\|x\| \leq \|x\|_* \leq C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ist U Umgebung von p bezüglich $\|\cdot\|$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$. Dann ist auch

$$U^*_{c\varepsilon}(p) := \{q \in \mathbb{R}^n : \|q-p\|_* < c \cdot \varepsilon\} \subseteq U_\varepsilon(p) \subseteq U,$$

d.h., U ist Umgebung von p bezüglich $\|\cdot\|_*$. Die Umkehrung folgt aus der Symmetrie der Äquivalenzrelation.
(iii) folgt aus (ii) und der Tatsache, dass eine Abbildung f genau dann stetig ist, wenn die Urbilder offener Mengen unter f offen sind (Satz IV.1.4). ■

Aufgabe IX.4.2. Zeigen Sie, dass sich Satz IX.4.9 und Folgerung IX.4.10 auch auf den $\mathbb{C}^n$ übertragen lassen. ■

Definition IX.4.11. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und $\mathrm{Hom}(V,W)$ der Raum der linearen Abbildungen von V nach W. Wir definieren für $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ die *Operatornorm*

$$\|A\| := \sup\{\|Av\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1\} \in [0,\infty],$$

und wir setzen

$$\mathcal{L}(V,W) := \{A \in \mathrm{Hom}(V,W) : \|A\| < \infty\}.$$ ■

Satz IX.4.12. *Für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen sind äquivalent:*

(1) *Es ist $A \in \mathcal{L}(V,W)$, d.h. $\|A\| < \infty$.*
(2) *Es existiert ein $C \geq 0$ mit $\|Av\| \leq C \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$.*
(3) *A ist stetig.*
(4) *A ist im Nullpunkt stetig.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Ist $v \neq 0$, so ist $\|\frac{v}{\|v\|}\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$ und daher $\|A\frac{v}{\|v\|}\| \leq \|A\|$. Folglich gilt $\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Für $v, w \in V$ gilt $\|Av - Aw\| \leq C\|v-w\|$, also ist A sogar Lipschitz-stetig und insbesondere stetig.
(3) $\Rightarrow$ (4): Das ist trivial.
(4) $\Rightarrow$ (1): Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ mit $\|Av\| < \varepsilon$ für $\|v\| \leq \delta$. Dann ist $\|A(\delta v)\| < \varepsilon$ für $\|v\| \leq 1$, also $\|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty$. ■

Lemma IX.4.13. *Seien V, W und U normierte Räume.*

(a) *Die Menge $\mathcal{L}(V,W)$ ist bezüglich der Operatornorm ein normierter Raum.*
(b) *Für $A \in \mathcal{L}(V,W)$ und $B \in \mathcal{L}(W,U)$ ist $BA := B \circ A \in \mathcal{L}(V,U)$, und es gilt $\|BA\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.*

Beweis. Übung! ■

Beispiele IX.4.14. (a) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $C([a,b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \colon a \leq x \leq b\}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$I\colon C([a,b]) \to \mathbb{R}, \quad I(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

die durch das Riemann-Integral gegeben ist. Dann ist I stetig, denn wir haben die Abschätzung

$$|I(f)| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\|f\| \quad \text{für alle} \quad f \in C([a,b]),$$

d.h. $\|I\| \leq b-a$. (Wieso gilt hier sogar Gleichheit?)
(b) Sei $C^1([0,1])$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, ebenfalls versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$D\colon C^1([0,1]) \to C([0,1]), \quad D(f) = f',$$

die durch die Ableitung gegeben ist. Dann ist D unstetig, denn für die Funktionen $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$ gilt $\|f_n\| = 1$ und $\|D(f_n)\| = \|f_n'\| = n$. Folglich ist

$$\|D\| \geq \sup\{\|D(f_n)\| \colon n \in \mathbb{N}\} = \infty.$$

(c) Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und betrachten eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix $(a_{jk})_{j,k}$ gegeben sei. Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\|A(x)\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,m} \Big|\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k\Big| \leq \|x\|_\infty \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|,$$

also

$$\|A\| \leq \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|.$$

Wir zeigen, dass sogar Gleichheit gilt. Ist $A = 0$, so ist dies trivial. Wir nehmen daher $A \neq 0$ an. Nun wählen wir j_0 so, dass

$$\max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \sum_{k=1}^n |a_{j_0k}|$$

gilt, und betrachten den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_k = \operatorname{sgn}(a_{j_0k})$. Da mindestens ein k mit $a_{j_0k} \neq 0$ existiert, ist $\|x\|_\infty = 1$. Weiter ist

$$\|A\| \geq \|A(x)\|_\infty \geq \sum_k a_{j_0k}x_k = \sum_k |a_{j_0k}| = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|,$$

und wir erhalten

$$\|A\| = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|. \qquad \blacksquare$$

Theorem IX.4.15. *Alle linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen normierten Räumen sind stetig.*

Beweis. Da jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum V zu $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim V$ isomorph ist (Lineare Algebra), können wir uns auf lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ beschränken. Wegen Folgerung IX.4.10(iii) dürfen wir weiter annehmen, dass beide Räume mit $\|\cdot\|_\infty$ versehen sind. Für $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}e_i$ gilt dann wegen Beispiel IX.4.14:

$$\|A\| = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}| < \infty,$$

insbesondere ist A stetig. ∎

Sind V_1, V_2, W Vektorräume, so nennen wir eine Abbildung

$$A\colon V_1 \times V_2 \ \to \ W$$

bilinear, wenn die Abbildungen

$$v_2 \mapsto A(v_1, v_2) \quad \text{bzw.} \quad v_1 \mapsto A(v_1, v_2)$$

für alle $v_1 \in V_1$ bzw. $v_2 \in V_2$ linear sind.

Beispiele IX.4.16. (für bilineare Abbildungen)
(a) Sind V und W Vektorräume, so ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(V, W) \times V \to W, \quad (A, v) \mapsto A(v)$$

bilinear.
(b) Ist $M_{n,m}(\mathbb{R})$ der Raum der reellen $n \times m$-Matrizen, so ist die Multiplikationsabbildung

$$M_{n,m}(\mathbb{R}) \times M_{m,k}(\mathbb{R}) \to M_{n,k}(\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto A \circ B$$

bilinear.
(c) Das Skalarprodukt

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

ist bilinear. Sind $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so besagt die Hölder-Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

Man vergleiche dies mit der Aussage von Satz IX.4.17. ∎

Satz IX.4.17. *Es seien V_1, V_2 und W normierte Räume und $A\colon V_1 \times V_2 \to W$ eine bilineare Abbildung. Wir versehen $V_1 \times V_2$ mit der Norm $\|(v_1, v_2)\| := \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$. Dann sind äquivalent:*

(1) *Die Abbildung A ist stetig.*

(2) *Die Abbildung A ist im Nullpunkt stetig.*

(3) *Es existiert eine Zahl $C > 0$, so dass für alle $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ gilt*

$$\|A(v_1, v_2)\| \leq C \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist trivial.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass für alle Paare (v_1, v_2) mit $\|(v_1, v_2)\| \leq \delta$ die Ungleichung $\|A(v_1, v_2)\| \leq \varepsilon$ erfüllt ist. Dann gilt $A(v_1, v_2) = 0$, falls $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$, und sonst

$$\|A(v_1, v_2)\| = \left\| A\Big(\delta \frac{v_1}{\|v_1\|}, \delta \frac{v_2}{\|v_2\|}\Big) \right\| \cdot \frac{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}{\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2} \|v_1\| \cdot \|v_2\|,$$

da $\big\|\big(\delta \frac{v_1}{\|v_1\|}, \delta \frac{v_2}{\|v_2\|}\big)\big\| = \delta$ ist.
(3) $\Rightarrow$ (1): Wir rechnen

$$\begin{aligned} \|A(v_1, v_2) - A(v_1', v_2')\| &\leq \|A(v_1, v_2) - A(v_1, v_2')\| + \|A(v_1, v_2') - A(v_1', v_2')\| \\ &= \|A(v_1, v_2 - v_2')\| + \|A(v_1 - v_1', v_2')\| \\ &\leq C \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2 - v_2'\| + C \cdot \|v_1 - v_1'\| \cdot \|v_2'\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass A stetig ist. ■

Analog zu Theorem IX.4.15 zeigt man:

Satz IX.4.17. *Sind V_1, V_2 und W endlichdimensionale normierte Räume, so ist jede bilineare Abbildung $A : V_1 \times V_2 \to W$ stetig.* ■

Folgerung IX.4.18. *Sind V_1, V_2 und V_3 endlichdimensionale normierte Räume, so ist die Kompositionsabbildung*

$$\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \times \mathrm{Hom}(V_2, V_3) \to \mathrm{Hom}(V_1, V_3), \quad (A, B) \mapsto B \circ A$$

stetig. Es gilt sogar $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. ■