VII. Taylorreihen

In diesem Kapitel werden wir eine Methode kennenlernen, differenzierbare Funktionen lokal durch Polynome zu approximieren. Im gleichen Sinne wie die Differenzierbarkeit einer Funktion es erlaubt, sie lokal durch eine affine Funktion anzunähern, werden wir sehen, dass die n-malige Differenzierbarkeit die lokale Approximierbarkeit durch Polynome n-ten Grades liefert. Die Methoden dieses Abschnitts sind eine zentrale Grundlage für viele Anwendungen der Analysis, da sie es erlauben, mit Näherungen zu rechnen, wenn die exakten Formeln zu kompliziert werden.

In diesem Abschnitt steht D immer für ein Intervall in $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Punkte enthält.

VII.1. Taylorentwicklung

Um die Grundidee der Taylorentwicklung zu verstehen, betrachten wir zunächst eine Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-p)^k$ auf $\mathbb{R}$. Durch m-faches Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{[m]}(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)\cdot(x-p)^{k-m} \\ &= \sum_{k=m}^{n} a_k \binom{k}{m} m! \cdot (x-p)^{k-m}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $f^{[m]}(p) = a_m \cdot m!$. Daher ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(p)}{k!}(x-p)^k. \tag{1.1}$$

Diese Formel zeigt insbesondere, dass jedes Polynom vom Grade $\leq n$ eindeutig durch seine Ableitungen bis zur Ordnung n im Punkte p bestimmt ist.

Beachte: Dass wir das Polynom f direkt in der Gestalt $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-p)^k$ geschrieben haben, stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Denn ist zunächst $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k \big((x-p)+p\big)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x-p)^j \cdot p^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \binom{k}{j} p^{k-j} \right) (x-p)^j. \end{aligned}$$

Jedes Polynom in x lässt sich also auch als Polynom in $x-p$ schreiben. ■

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Problem beschäftigen, zu einer n-mal differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grade n zu finden, das sich in einem Punkt $p \in D$ möglichst gut an f anschmiegt. Die Formel (1.1) zeigt uns, wie wir das zu tun haben.

Definition VII.1.1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $p \in D$. Dann heißt

$$T_p^n(f)(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(p)}{k!} t^k$$

das *n-te Taylorpolynom von f bei p*. Ist f in einer Umgebung von p beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe

$$T_p^\infty(f)(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{[k]}(p)}{k!} t^k$$

die *Taylorreihe von f bei p*. ■

Bemerkung VII.1.2. Das n-te Taylorpolynom $T_p^n(f)$ ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$ mit

$$T_p^n(f)^{[k]}(0) = f^{[k]}(p) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Dies bedeutet, dass die Ableitungen bis zur Ordnung n des Restgliedes

$$r_n(x) := f(x) - T_p^n(f)(x-p)$$

in p verschwinden. Für $n = 1$ ist

$$T_p^1(f)(x-p) = f(p) + (x-p) \cdot f'(p)$$

diejenige affine Funktion, die sich in p am besten an f in dem Sinne anschmiegt, dass sie in p den gleichen Wert und die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n besitzt. ■

Definition VII.1.3. $r_n(x) := f(x) - T_p^n(f)(x-p)$ heißt das *n-te Restglied von f bei p.* Beachte, dass für $k = 0, \ldots, n$ die Beziehung $r_n^{[k]}(p) = 0$ gilt. ■

Satz von Taylor—Taylorformel

Satz VII.1.4. *Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und f eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sowie $p, x \in D$. Dann gilt*

$$f(x) = T_p^n(f)(x-p) + r_n(x) \qquad \textit{mit} \qquad r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n \cdot f^{[n+1]}(t)\,dt.$$

Beweis. Es ist nur die Integraldarstellung des Restglieds $r_n(x)$ zu beweisen. Zunächst ist $r_n^{[k]}(p) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$, und wegen $\big(T_p^n\big)^{[n+1]} \equiv 0$ ist $r_n^{[n+1]} = f^{[n+1]}$. Wir berechnen das Integral durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_p^x (x-t)^n f^{[n+1]}(t)\,dt &= \int_p^x (x-t)^n r_n^{[n+1]}(t)\,dt \\ &= \Big[(x-t)^n \cdot r_n^{[n]}(t)\Big]_p^x + \int_p^x n(x-t)^{n-1} r_n^{[n]}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ist $n > 0$, so ist $(x-x)^n = 0$ und $r_n^{[n]}(p) = 0$, also

$$\int_p^x (x-t)^n r_n^{[n+1]}(t)\,dt = n\int_p^x (x-t)^{n-1} r_n^{[n]}(t)\,dt.$$

Induktiv erhalten wir:

$$\int_p^x (x-t)^n \cdot r_n^{[n+1]}(t)\,dt = n!\int_p^x r_n'(t)\,dt = n!\big(r_n(x) - r_n(p)\big) = n! r_n(x). \qquad ■$$

Bemerkung VII.1.5. Für $n = 0$ liefert der Taylorsche Satz VII.1.4

$$f(x) = f(p) + \int_p^x f'(t)\,dt,$$

was wir schon aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennen. ■

Die einfachste Darstellung des Restglieds ist die folgende. Sie ist für viele Abschätzungen sehr wichtig.

Restglieddarstellung nach Lagrange

Satz VII.1.6. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus* VII.1.4 *existiert ein ξ zwischen x und p mit*

$$r_n(x) = \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1]}(\xi).$$

Beweis. Sei zunächst $p \leq x$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung VI.1.14 existiert ein $\xi \in [p, x]$ mit

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_p^x \underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0} f^{[n+1]}(t)\, dt = f^{[n+1]}(\xi) \cdot \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n\, dt \\ &= f^{[n+1]}(\xi) \cdot \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Für $x < p$ ist $(t-x)^n \geq 0$ und somit der Mittelwertsatz der Integralrechnung auch anwendbar. ■

Beachte: Das Lagrange-Restglied hat dieselbe Gestalt wie alle anderen Glieder des Taylorpolynoms, nur dass $f^{[n+1]}$ nicht an p sondern in ξ ausgewertet wird.

Bemerkung VII.1.7. Unter den Voraussetzungen von Satz VII.1.4 folgt direkt aus Satz VII.1.6 wegen der Stetigkeit von $f^{[n+1]}$ in p:

$$\lim_{x \to p} \frac{r_n(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{f^{[n+1]}(p)}{(n+1)!}.$$

Die Abbildung

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{r_n(x)}{(x-p)^{n+1}}, & \text{falls } x \neq p \\ \dfrac{f^{[n+1]}(p)}{(n+1)!}, & \text{falls } x = p \end{cases}$$

ist also stetig und es gilt

$$f(x) = T_p^n(f)(x-p) + (x-p)^{n+1}\psi(x).$$

Beachte, dass dies für $n = 1$ analog zur Definition der Differenzierbarkeit ist (vgl. Lemma V.1.5). ■

Der folgende Satz ist eine Verschärfung der Restglieddarstellung von Lagrange, denn hier wird $f^{[n+1]}$ nicht als stetig vorausgesetzt und θ_x liegt im offenen Intervall $]\,0, 1\,[$.

Satz VII.1.8. (Verschärfte Restglieddarstellung von Lagrange) *Die Funktion f sei im Intervall $[p, p+x]$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert ein $\theta_x \in \,]0,1[$ mit*

$$f(p+x) = T_p^n(f)(x) + \frac{f^{[n+1]}(p+\theta_x \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Beweis. Wir wenden den allgemeinen Mittelwertsatz (Satz V.3.1) mit

$$r(x) = f(p+x) - T_p^n(f)(x) \quad \text{und} \quad g(x) = x^{n+1}$$

an. Wir erhalten hiermit induktiv

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{x^{n+1}} &= \frac{r'(\theta_1 x)}{(n+1)(\theta_1 x)^n} = \frac{r''(\theta_1\theta_2 x)}{(n+1)n(\theta_1\theta_2 x)^{n-1}} \\ &= \ldots = \frac{r^{[n+1]}(\theta_1 \ldots \theta_{n+1} x)}{(n+1)!} = \frac{f^{[n+1]}(p+\theta_x \cdot x)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit $\theta_x := \theta_1 \cdots \theta_{n+1} \in \,]0,1[$. ■

Beispiel VII.1.9. Die Taylorentwicklung kann man insbesondere zur effizienten Berechnung von Grenzwerten verwenden. Wir diskutieren hierzu ein Beispiel. Gesucht sei $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Setze $f(x) := 1 - \cos x$. Dann ist $f(0) = 0 = f'(0)$ und $f''(0) = \cos 0 = 1$. Es folgt $f(x) = 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + x^3 \cdot \psi(x)$ mit einer stetigen Funktion ψ (Folgerung VII.1.7). Also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} x\psi(x) = \frac{1}{2} + 0 \cdot \psi(0) = \frac{1}{2}$$ ■

Das Konvergenzverhalten von Taylorreihen ist in der Regel **sehr schlecht**. Ist f in einer Umgebung von p beliebig oft differenzierbar, so muß die Taylorreihe

$$\big(T_p^\infty f\big)(x-p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{[k]}(p)}{k!}(x-p)^k$$

trotzdem nicht konvergieren. Und wenn sie konvergiert, so *muß sie nicht gegen $f(x)$ konvergieren!* Man betrachte hierzu die Taylorreihe $T_0^\infty(f)$ der Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ aus Bemerkung V.2.10. In diesem Fall verschwindet die Taylorreihe, aber trotzdem ist $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Der folgende Satz von Borel zeigt sogar, dass jede Folge als Koeffizientenfolge einer Taylorreihe auftreten kann.

Satz von Borel: *Für jede Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{[n]}(0) = n!a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.* ■

Für den Beweis verweisen wir auf Satz 4.5 in Th. Bröcker's „Analysis I“. Der folgende Satz zeigt wenigstens, dass Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen dargestellt werden, mit ihrer Taylorreihe übereinstimmen.

Satz VII.1.10. *Ist f in einer Umgebung von p durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt, so stimmt diese mit der Taylorreihe von f in p überein.*

Beweis. Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-p)^k$ für $|x-p| < r$, so ist gemäß Satz VI.3.5:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \cdot (x-p)^{k-n},$$

also $f^{[n]}(p) = n!\, a_n$ und somit $a_n = \frac{f^{[n]}(p)}{n!}$. ∎

Satz VII.1.11. *Sei f auf D beliebig oft differenzierbar und $M > 0$ mit*

$$\sup_{x \in D} |f^{[n]}(x)| \leq M \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$f(x) = T_p^{\infty}(f)(x-p)$$

für alle $x \in D$, d.h., die Funktion f wird durch ihre Taylorreihe dargestellt.

Beweis. Mit Satz VII.1.6 erhalten wir

$$|r_n(x)| = \frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{n+1}(\xi) \right| \leq M \cdot \frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

da $e^{|x-p|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |x-p|^n$ konvergiert. Also gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_p^n(f)(x-p) = T_p^{\infty}(f)(x-p).$$ ∎

Beispiel VII.1.12. (1) Für $f(x) = \cos(x)$ gilt

$$f^{[4n]}(x) = \cos x, \quad f^{[4n+1]}(x) = -\sin x$$

und

$$f^{[4n+2]}(x) = -\cos x \quad \text{und} \quad f^{[4n+3]}(x) = \sin x.$$

Die Voraussetzungen von Satz VII.1.11 sind also erfüllt, und wir haben für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = T_0^{\infty}(\cos)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{[n]}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{[2n]}(0)}{2n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

(2) Analog deutet man die Reihenentwicklung der Sinusfunktion:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$ ∎

Satz VII.1.13. (Die binomische Reihe) *Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \textit{mit} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Beweis. Für $a_k := \binom{\alpha}{k}x^k$ ist $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1}xa_k$. Wegen $\left|\frac{\alpha-k}{k+1}x\right| \to |x|$ folgt die Konvergenz der Reihe für $|x| < 1$ aus dem Quotientenkriterium. Wir setzen $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ für $|x| < 1$. Dann ist f gliedweise differenzierbar (Satz VI.3.5), also gilt

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot f'(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}k\cdot x^{k-1}\\ &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}\\ &= \alpha(1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^{k-1}\\ &= \alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^k\right)\\ &= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\right)x^k\right)\\ &= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\right) = \alpha\cdot f(x).\end{aligned}$$

Wir erhalten $(1+x)\cdot f'(x) = \alpha\cdot f(x)$. Weiter ist $f(0) = 1 = (1+0)^\alpha$. Für $g(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$ gilt daher $g(0) = 1$ und

$$\begin{aligned}g'(0) &= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}}\\ &= \frac{\alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1} - \alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.\end{aligned}$$

Die differenzierbare Funktion g ist also auf dem Intervall $D =]-1,1[$ konstant 1. Daher gilt $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$. ■

Beachte: Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist $(1+x)^\alpha$ ein Polynom. Die Reihe bricht nach dem $(\alpha+1)$-ten Glied ab, da $\binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > \alpha$ gilt. Spezialfälle sind:

- $\displaystyle\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
- $\displaystyle\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$
- $\displaystyle\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \dots,$

denn

$$\begin{aligned}\binom{\frac12}{n} &= \frac{\frac12\cdot(\frac12-1)\cdots(\frac12-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(n-\frac32)(n-\frac52)\cdots\frac32\cdot\frac12\cdot\frac12}{n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\end{aligned}$$

Man erhält aus der obigen Diskussion eine brauchbare Näherungsformel für die Wurzelfunktion:

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}\qquad \text{für „kleine“ } x.$$

Insbesondere in der Speziellen Relativitätstheorie werden oft Näherungen des Typs

$$\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)^{-\frac12}\approx 1+\frac12\frac{v^2}{c^2}$$

verwendet.

Beispiel VII.1.14. Für die Funktion $\arcsin : [-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ erhalten wir für $|x|<1$:

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac12}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\frac12}{n}x^{2n}.$$

Wegen $\arcsin(0)=0$ erhalten wir aus Satz VI.3.2 damit die Entwicklung

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\frac12}{n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Und wegen

$$\binom{n-\frac12}{n}\frac{1}{2n+1}=\frac{(n-\frac12)(n-\frac32)\cdots\frac12}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}\frac{1}{2n+1}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n+1)(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}$$

ist

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\cdots\ . \qquad \blacksquare$$

VII.2. Rechnen mit Taylorreihen

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $0 \in D$, die im Nullpunkt mindestens n-mal differenzierbar ist, setzen wir $T^n(f) := T_0^n(f)$ (das n-te Taylorpolynom in 0). Ist f beliebig oft differenzierbar, so setzen wir $T(f) := T_0^\infty(f)$.

Die allgemeine Produktregel/Leibnizformel

Satz VII.2.1. *Sind f und g beide n-mal differenzierbare Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, so gilt*

$$(f \cdot g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} \cdot g^{[n-k]}.$$

Beweis. Übung. ∎

Satz VII.2.2. *Sind f und g im Nullpunkt mindestens n-mal differenzierbar, so gelten*

(1) $T^n(f+g) = T^n(f) + T^n(g)$ *und*

(2) $T^n(f \cdot g) = T^n\big(T^n(f) \cdot T^n(g)\big)$.

Beweis. (1) Dies folgt sofort aus $(f+g)^{[k]}(0) = f^{[k]}(0) + g^{[k]}(0)$ für $0 \le k \le n$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}
&T^n(f)(x)\, T^n(g)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} x^k \sum_{l=0}^{n} \frac{g^{[l]}(0)}{l!} x^l \\
&= \sum_{k+l \le n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} \frac{g^{[l]}(0)}{l!} x^{k+l} + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{2n} \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{[k]}(0) \cdot g^{[m-k]}(0) \right) \cdot x^m + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{2n} \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}}
\end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Produktregel (Satz VII.2.1) erhalten wir also

$$T^n\big(T^n(f) \cdot T^n(g)\big)(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} (f \cdot g)^{[m]}(0) \cdot x^m = T^n(f \cdot g)(x).$$ ∎

Anschaulich bedeutet Teil (2) des vorigen Satzes, dass man das Taylorpolynom von $f \cdot g$ erhält, indem man die Taylorpolynome $T^n(f)$ und $T^n(g)$

multipliziert und anschließend alle Terme der Ordnung $\geq n+1$ weglässt: Für $T_p^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{[k]}(p)x^k$ und $T_p^n(g)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{[k]}(p)x^k$ ist

$$\begin{aligned} T_p^n(f\cdot g)(x) &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{[k]}(p)\cdot g^{[m-k]}(p)\right)\cdot x^m \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=0}^m \frac{f^{[k]}(p)}{k!}\frac{g^{[m-k]}(p)}{(m-k)!}\right)\cdot x^m. \end{aligned}$$

Beispiel VII.2.3. (a) Gesucht ist die Taylorreihe von

$$x \mapsto \frac{\log(1+x)}{1+x}$$

in $p=0$. Für $|x|<1$ haben wir schon gesehen, dass

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{x^k}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k \text{ (geometrische Reihe)}$$

gilt, wobei die Reihen absolut konvergieren. Wegen Satz VII.2.1 und der absoluten Konvergenz der Reihen, dürfen wir die Taylorreihe des Produktes mit der Cauchy-Produktformel berechnen und erhalten daher

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1)^{n-k}\right)\cdot x^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k}\right)\cdot x^n.$$

(b) Hat die Funktion $f(x) := x(1+x-\cos x)$ ein Extremum am Nullpunkt? Hierzu berechnen wir das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f.

Für $g(x) = 1+x-\cos x$ ist $T_0(g)(x) = 1+x-\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$, also $T_0^2(g)(x) = x+\frac{x^2}{2}$. Ferner ist $T_0^2(h)(x) = x$ für $h(x) = x$. Durch Zusammensetzen erhält man

$$T_0^2(f)(x) = T_0^2(g\cdot h)(x) = T_0^2\big(T_0^2(g)\cdot T_0^2(h)\big)(x) = x^2,$$

da $(x+\frac{x^2}{2})x = x^2+\frac{x^3}{2}$. Man erkennt also, dass $f(0) = 0 = f'(0)$ und $f''(0) = 2 > 0$ ist, so dass f im Nullpunkt ein isoliertes Minimum besitzt. ∎

Beispiel VII.2.4. (Methode der unbestimmten Koeffizienten) Genügt eine Funktion f einer Gleichung oder einer Differentialgleichung (dies ist eine Gleichung, in der auch Ableitungen von f vorkommen), so kann man f als Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ ansetzen und bestimmt hieraus die Koeffizienten a_n, soweit dies möglich ist. Danach bestimmt man den Konvergenzbereich der so erhaltenen Potenzreihe.

(a) Gesucht ist die Taylorentwicklung des Tangens im Nullpunkt. Wir haben die Differentialgleichung $\tan' = 1+\tan^2$; ferner wissen wir $\tan(0) = 0$.

Wir machen nun den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $f(0) = 0$ und $f' = 1 + f^2$. Aus $f(0) = 0$ erhalten wir $a_0 = 0$. Durch gliedweises Ableiten erhalten wir weiter

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung $f' = 1 + f^2$ liefert

$$1 + f(x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} \right) \cdot x^n.$$

Falls f der Differentialgleichung genügt, müssen diese beiden Reihen übereinstimmen, weswegen wir einen Koeffizientenvergleich für die a_n anstellen können. Wir erhalten für $n = 0$ die Beziehung $a_1 = 1 + a_0^2 = 1$ und ferner eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten mit höherem Index:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Die sechs ersten Koeffizienten errechnen sich mit Hilfe dieser Rekursionsgleichung zu

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(a_0 a_1 + a_1 a_0) = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}(a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5}(a_1 a_3 + a_3 a_1) = \frac{2}{15}.$$

Wir stellen nun zwei Behauptungen auf.

(1) Es gilt $a_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dies zeigt man durch Induktion: Wir wissen schon, dass $a_0 = 0$ ist. Für $n \geq 0$ ist

$$a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2} \sum_{k=1}^{2n} a_k \cdot a_{2n+1-k}.$$

Ist in dieser Summe der Index k ungerade, so ist $2n+1-k$ gerade und umgekehrt. Damit ist die ganze Summe 0, da nach der Induktionsannahme $a_{2k} = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$ gilt.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq a_n \leq 1$.

Aus der Rekursionsformel folgt sofort $0 \leq a_n$ für alle n; speziell ist $0 \leq a_0 \leq 1$. Ist nun $0 \leq a_k \leq 1$ für $k = 0, \ldots, n$, so folgt auch

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Damit ist insbesondere auch $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ und somit der Konvergenzradius der Reihe ≥ 1. Wir erhalten also eine Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$. Gemäß unserer Konstruktion ist $f(0) = 0$ und $f' = 1 + f^2 \geq 1$ (Satz VI.3.2). Damit ist f streng monoton wachsend, also $f :]-1,1[\to f(]-1,1[)$ umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion $f^{-1} : f(]-1,1[) \to]-1,1[$, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + f(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wegen $f^{-1}(0) = 0$ ist damit $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$ und folglich $f(x) = \tan x$ für $|x| < 1$. Wir haben also gesehen, dass sich die Tangensfunktion auf dem Intervall $]-1,1[$ durch eine Potenzreihe

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

darstellen lässt. Die Koeffizienten erhält man aus der obigen Rekursionsformel.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist also

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

und ebense $f(0) = \frac{1}{1!} = 1$. Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ durch eien konvergente Potenzreihe darstellbar und daher beliebig oft differenzierbar (Satz VI.3.2).

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0$, und folglich ist

$$g(x) := \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen nun für die Funktion g wie oben eine Potenzreihe an:

$$T_0(g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n.$$

Die Koeffizienten $\beta_n = g^{[n]}(0)$ heißen *Bernoulli-Zahlen.*

Die Gleichung $g(x)f(x) = 1$ liefert $g(x)(e^x - 1) = x$, also $T_0(g) \cdot T_0(e^x - 1) = x$, das heißt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich $\beta_0 = g(0) = 1$. Für $n \geq 2$ erhält man aus der Summe eine Rekursionsgleichung für β_{n-1}:

$$\beta_{n-1} = -(n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}.$$

Damit können wir weitere Bernoulli-Zahlen berechnen:

$$\beta_1 = -\frac{\beta_0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -2!\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2\cdot 2!}\right) = -2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

und

$$\beta_4 = -4!\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2\cdot 4!} + \frac{1}{6\cdot 2!\,3!}\right) = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{30}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\beta_{2k+1} = 0$: Hierzu betrachten wir die um $\beta_1 x$ modifizierte Funktion g.

$$\begin{aligned} g(x) + \tfrac{1}{2}x &= \frac{x}{e^x - 1} + \tfrac{1}{2}x = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(e^x - 1)\right)}{e^x - 1} \\ &= \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})} = \frac{x}{2}\frac{\cosh(\frac{x}{2})}{\sinh(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen sinh und cosh jeweils definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Wir schließen hieraus, dass $g(x) + \frac{1}{2}x$ eine gerade Funktion ist. Also gilt

$$g^{[2k+1]}(0) = \beta_{2k+1} = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$ ■

Bemerkung VII.2.6. Es gilt

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!}(-1)^{n+1}\beta_{2n} x^{2n-1} \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Die Bernoullizahlen liefern also auch die Entwicklung der Tangensfunktion (sogar für $|x| < \frac{\pi}{2}$). ■

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung der Kettenregel zu. Die Kettenregel macht eine Aussage über die Ableitung einer Komposition von Funktionen:

$$\left(g \circ f\right)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Die Ableitung einer Funktion bekommt man aus ihrem Taylorpolynom erster Ordnung. Man kann die Kettenregel wie folgt mit Taylorpolynomen schreiben:

$$T_p^1(g \circ f) = T_{f(p)}^1(g) \cdot T_p^1(f).$$

Diese Regel lässt sich verallgemeinern.

$\boxed{\text{Allgemeine Kettenregel}}$

Satz VII.2.7. *Gegeben seien n-mal differenzierbare Funktionen*

$$f : D \to B \subseteq \mathbb{R}, \quad g : B \to \mathbb{R}$$

und ein Punkt $p \in D$ mit $f(p) = q$. Dann gilt

$$T_p^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_q^n(g) \circ (T_p^n(f) - q)\big).$$

Beweis. Ersetzen wir f durch $x \mapsto f(p+x) - q$ und g durch $x \mapsto g(x+q)$, so dürfen wir $p = q = 0$ annehmen. Für den Spezialfall, dass $g(y) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell y^\ell$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ ist, liefert Satz VII.2.2(2)

$$\begin{aligned} T_0^n(g \circ f) &= \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot T_0^n(f^\ell) = \sum_{\ell=0}^n a_j \cdot T_0^n\big(T_0^n(f)^\ell\big) = T_0^n\left(\sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot T_0^n(f)^\ell\right) \\ &= T_0^n\big(g \circ T_0^n(f)\big) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big), \end{aligned}$$

da $g = T_0^n(g))$ ist. Für eine allgemeine Funktion g setzen wir $\widetilde{g} := g - T_0^n(g)$. Dann ist $T_0^n(g)$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$, und wir erhalten

$$T_0^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ f\big) + T_0^n(\widetilde{g} \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big) + T_0^n(\widetilde{g} \circ f).$$

Wir behaupten nun, dass $T_0^n(\widetilde{g} \circ f) = 0$ ist. Dies zeigen wir, indem wir durch Induktion nach k nachweisen, dass aus $h^{[j]}(0) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, k \leq n$ die Beziehung $T_0^k(h \circ f) = 0$ folgt. Diese Aussage können wir dann auf $h = \widetilde{g}$ anwenden.

(A) Für $k = 0$ ist $T_0^0(h \circ f)(0) = h(f(0)) = h(0) = 0$.

(S) $k \to k+1$: Für $k < n$ haben wir

$$\begin{aligned} \big(h \circ f\big)^{[k+1]}(0) &= \big((h \circ f)'\big)^{[k]}(0) = \big((h' \circ f) \cdot f'\big)^{[k]}(0) \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \underbrace{\big(h' \circ f\big)^{[m]}(0)}_{=0} \cdot f^{[k+1-m]}(0), \end{aligned}$$

denn wir können die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion h' anwenden, deren Ableitungen bis zur Ordnung k in 0 verschwindet. Damit ist

$$\big(h \circ f\big)^{[k+1]}(0) = 0.$$

Die Induktion zeigt jetzt, dass $\big(h \circ f\big)^{[k]}(0) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ gilt, folglich $T_0^n(h \circ f) = 0$. Wir haben also

$$T_0^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big)$$

gezeigt. ■

Beispiel VII.2.8. Wie berechnet man die dritte Ableitung von $g \circ f$? Man schreibt $T_q^3(g)(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$, wobei $a_j = \frac{g^{[j]}(q)}{j!}$ ist, und

$$T_p^3(f)(x) - q = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad \text{mit} \quad b_j = \frac{f^{[j]}(p)}{j!}.$$

Die gerade bewiesene Aussage entspricht dann

$$T_p^3(g \circ f) = T_0^3\big(T_q^3(g) \circ (T_p^3(f) - q)\big).$$

Den Term dritter Ordnung erhält man durch Einsetzen:

$$a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = \frac{(g \circ f)'''(p)}{3!}.$$

Die allgemeine Formel lautet:

$$(g \circ f)'''(p) = g'(q) f'''(p) + 3g''(q) f'(p) f''(p) + g'''(q)\big(f'(p)\big)^3. \qquad \blacksquare$$

VIII. Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt werden wir die Integration verwenden, um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Hierbei wird sich eine interessante Analogie zwischen unendlichen Reihen und den sogenannten uneigentlichen Integralen zeigen. Aus dieser Korrespondenz lassen sich sehr feine Resultate über das Konvergenzverhalten von Reihen gewinnen, da uns nun der Kalkül der Differentialrechnung zur Verfügung steht.

Definition VIII.1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in]a, \infty]$. Weiter sei $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für alle $x \in [a, b[$ die Einschränkung $f|_{[a,x]}$ Riemann-integrabel ist. Falls er existiert, heißt der Grenzwert

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\, dt$$

das *uneigentliche Integral von f auf* $[a, b[$. Die Integrale $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ heißen *Partialintegrale* (analog zu den Partialsummen von Reihen). Analog definiert man uneigentliche Integrale für $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, wenn f auf allen Intervallen $[x, b]$, $x \in]a, b]$ Riemann-integrabel ist. ■

Bemerkung VIII.2. Ist $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\, dt$. Die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b F'(t)\, dt$ ist also äquivalent zur Existenz des Grenzwerts $\lim_{x \nearrow b} F(x)$. ■

Der folgende Satz zeigt, dass wir Reihen als eine spezielle Form von uneigentlichen Integralen ansehen dürfen.

Satz VIII.3. *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, so definieren wir*

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \ t \mapsto a_k \quad \textit{für} \quad k \le t < k + 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ existiert. In diesem Fall sind beide Werte gleich.

Beweis. Für $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$ und $n \le x < n + 1$ ist

$$F(x) = \int_0^n f(t)\, dt + \int_n^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + (x - n) \cdot a_n.$$

Insbesondere ist $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Existiert nun das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$, so existiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Konvergiert andererseits die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$, so ist für ausreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [n, n+1[$:

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|(x-n)a_n - \sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| \leq |a_n| + \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Wegen obiger Bemerkung verwundert es nicht, dass sich einige Konvergenzsätze für Reihen auf uneigentliche Integrale übertragen lassen.

SATZ ÜBER DIE MONOTONE KONVERGENZ

Satz VIII.4. *Ist $f \geq 0$ und $f|_{[a,x]} \in R_a^x$ für alle $x \in [a,b[$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ genau dann, wenn die Funktion $F : [a,b[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ beschränkt ist.*

Beweis. Wir setzen $s := \sup F([a,b[)$. Wir nehmen zuerst $s < \infty$ an. Da das Partialintegral F monoton wächst (beachte $f \geq 0$) und für ein $x \in [a,b[$ die Beziehung $F(x) > s - \varepsilon$ gilt, erhalten wir $F(y) > s - \varepsilon$ für alle $y \in [x,b[$. Also ist $|s - F(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in [x,b[$. Hieraus folgt $\lim_{x\to b} F(x) = s$.

Ist $s = \infty$, so folgt analog $\lim_{x\to b} F(x) = \infty$, d.h., das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ existiert nicht. $\blacksquare$

MAJORANTENKRITERIUM

Satz VIII.5. *Ist $0 \leq f \leq g$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(t)\,dt$, so existiert auch $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Beweis. Dies folgt wegen $\int_a^x f \leq \int_a^x g \leq \int_a^b g$ aus Satz VIII.4. $\blacksquare$

Beispiel VIII.6. Sei $a = 1$, $b = \infty$ und $f(x) = x^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$. Dann ist

$$F(x) = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1-x^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \log x, & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Für $\alpha < 1$ ist $1 - \alpha > 0$ und folglich $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = \infty$, d.h. $\int_1^\infty t^{-\alpha}\,dt$ existiert nicht. Für $\alpha = 1$ existiert $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ ebenfalls nicht, da $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$. Für $\alpha > 1$ jedoch ist $1 - \alpha < 0$ und daher $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = 0$. In diesem Fall existiert das Integral, und es gilt für $\alpha > 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}. \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass diese Rechnung viel einfacher war als diejenige, die wir gemacht haben, um die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ auf Konvergenz zu untersuchen. Man sieht also, dass der Kalkül der Differential- und Integralrechnung vieles einfacher macht. Wie man Ergebnisse über Reihen aus solchen für uneigentliche Integrale direkt gewinnen kann, zeigt der folgende Satz:

Satz VIII.7. *Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(t)\,dt$$

nicht negativ, monoton wachsend, und sie konvergiert mit

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1).$$

Insbesondere konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(t)\,dt$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert.

Beweis. Da f monoton fallend ist, ist $f \mid_{[1,x]}$ für alle $x \geq 1$ integrabel (vgl. Satz VI.1.10). Aus der Monotonie ergibt sich

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k). \tag{7.1}$$

Also ist insbesondere $a_k - a_{k-1} \geq 0$ und mit $a_0 = 0$ sehen wir, dass die Folge (a_k) nichtnegativ und monoton wachsend ist. Weiter erhalten wir aus (7.1) durch Summation

$$a_n \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt nun, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Die Beziehung

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1)$$

folgt aus $0 \leq a_n \leq f(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und der Rest der Behauptung direkt aus dem Bewiesenen und Satz VIII.4. ■

Beispiel VIII.8. (a) Wir wenden Satz VIII.7 auf die Funktion $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ an ($\alpha > 0$). Dann existiert das Integral

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

nach Beispiel VIII.6 genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist. Nach dem vorstehenden Satz ist dies genau dann der Fall, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$$

konvergiert. Wir erhalten sogar die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \leq f(1) = 1,$$

das heißt

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Für $\alpha > 1$ schreibt man

$$\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Die Funktion $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt *Riemannsche Zetafunktion.* Sie spielt in der Zahlentheorie, als Funktion im Komplexen, eine zentrale Rolle.

Wegen $\zeta(\alpha) \geq \frac{1}{1^\alpha} = 1$ und $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ist

$$\lim_{\alpha \to \infty} \zeta(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to 1} \zeta(\alpha) = \infty.$$

(b) Für $\alpha = 1$ erhalten wir wie im Beweis von Satz VIII.7:

$$\log(n + 1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log n.$$

Die nach Satz VIII.7 konvergente Folge

$$a_n := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log n$$

hat als Grenzwert die *Euler-Mascheronische Konstante*

$$c := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772\ldots,$$

d.h., die harmonische Reihe wächst genauso wie $\log n$. ■

Wir übertragen jetzt noch einige Konvergenzkriterien für Reihen auf uneigentliche Integrale.

Satz VIII.9. (Cauchykriterium) *Sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, und es gebe mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D, die gegen b konvergiert. Dann existiert* $\lim_{x \to b} F(x)$ *genau dann, wenn gilt:*

(1) $b \neq \pm\infty$*:* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, z \in U_\delta(b) \cap D) : |F(x) - F(z)| < \varepsilon$.

(2) $b = \infty$*:* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x, z \in D, x, z > N) : |F(x) - F(z)| \leq \varepsilon$.

(3) $b = -\infty$*:* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x, z \in D, x, z < -N) : |F(x) - F(z)| \leq \varepsilon$.

Beweis. Sei zunächst $b \neq \pm\infty$.

Wir nehmen zuerst an, dass $a := \lim_{x\to b} F(x)$ existiert. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|F(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|F(z) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x, z \in D \cap U_\delta(b)$. Damit ist

$$|F(x) - F(z)| \leq |F(x) - a| + |a - F(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sei nun (1) erfüllt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to b$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ gemäß (1) gewählt. Wegen $x_n \to b$ existiert ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - b| < \delta$ für alle $n > N_\delta$. Damit ist $|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\delta$. Die Folge $\big(F(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und daher konvergent. Sei $a := \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in D mit $y_n \to b$, so konvergiert auch die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots)$ gegen b. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = a.$$

Der Grenzwert hängt also nicht von der gewählten Folge ab, d.h. $\lim_{x\to b} F(x) = b$.

Die Fälle $b = \pm\infty$ behandelt man analog. ■

Wir wollen das Cauchysche Konvergenzkriterium insbesondere auf uneigentliche Integrale anwenden, d.h., wir betrachten

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in D = [a, b[.$$

Definition VIII.10. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ heißt *absolut konvergent*, wenn das Integral $\int_a^b |f(t)|\,dt$ konvergiert. ■

Satz VIII.11. *Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral konvergiert.*

Beweis. Für $x \geq a$ sei $F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$ und $G(x) := \int_a^x |f(x)|\,dx$. Dann gilt für $z \leq x$:

$$|F(z) - F(x)| = \Big|\int_x^z f(t)\,dt\Big| \leq \int_x^z |f(t)|\,dt = G(z) - G(x).$$

Die Behauptung folgt nun, indem wir das Cauchysche Konvergenzkriterium VIII.9 verwenden, um die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to b} F(x)$ einzusehen. ■

Folgerung VIII.12. *Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die von höherer als erster Ordnung in ∞ verschwindet, d.h. es existieren $\alpha > 1$, ein $c > a$ und ein $K > 0$, so dass für alle $t \geq c$ gilt $|f(t)| \leq \frac{K}{t^\alpha}$. Dann konvergiert das Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ absolut. Gilt dagegen $f(t) \geq \frac{K}{t}$ für ein $K > 0$ und alle $t \geq c$, so divergiert das Integral.*

Beweis. Ist $f(t) \geq \frac{K}{t}$ für $t \geq c \geq a$, so würden wir aus der Konvergenz des Integrals $\int_c^\infty f(t)\,dt$ nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\int_c^\infty \frac{dt}{t}$ folgern können. Folglich ist das Integral $\int_c^\infty f(t)\,dt$ und damit auch $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergent.

Gilt hingegen $|f(t)| \leq \frac{K}{t^\alpha}$ für $\alpha > 1$ und alle $t \geq c$, so folgt die Konvergenz des Integrals $\int_c^\infty |f(t)|\,dt$ aus dem Majorantenkriterium, Satz VIII.11 und Beispiel VIII.6, d.h., das Integral

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^\infty f(t)\,dt$$

ist absolut konvergent. ∎

Beispiel VIII.13. Wegen $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ für $x \geq 1$ konvergiert das Integral $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$. Wir wissen schon, dass $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$ ist. ∎

Natürlich betrachtet man auch Integrale, die an beiden Integralenden „uneigentlich" sind. Allgemein definieren wir

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f \quad \text{und} \quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

für $a < b < c$, wenn es sich an den Intervallenden $a, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ um uneigentliche Integrale handelt.

Beispiel VIII.14. (Die Gammafunktion) Für jedes $t > 0$ konvergiert das Integral

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x}\,dx$$

(die *Gamma-Funktion*), wobei das Integral an beiden Intervallenden als uneigentliches Integral zu verstehen ist. Für alle $x \geq 0$ ist $x^{t-1}e^{-x} \leq x^{t-1}$, und somit existiert das folgende uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium

$$\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}\,dx = \lim_{y\to 0} \int_y^1 x^{t-1}e^{-x}\,dx,$$

denn es gilt

$$\int_0^1 x^{t-1}\,dx = \lim_{x\to 0} \int_x^1 s^{t-1}\,ds = \lim_{x\to 0} \left[\frac{s^t}{t}\right]_x^1 = \frac{1}{t} - \lim_{x\to 0} \frac{x^t}{t} = \frac{1}{t}.$$

Weiter gilt:

$$x^2 \cdot (x^{t-1}e^{-x}) = x^{t+1}e^{-x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach den de l'Hospitalschen Regeln ist nämlich

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} (t+1)\frac{x^t}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} (t+1)\cdot t\frac{x^{t-1}}{e^x} = 0, \qquad \text{falls } t \in]0,1] \text{ ist, da } x^{t-1} \leq 1 \\
&= \lim_{x\to\infty} (t+1)\cdot t\cdot(t-1)\frac{x^{t-2}}{e^x} = 0, \qquad \text{falls } t \in]1,2] \text{ ist, da } x^{t-2} \leq 1 \\
&\ldots .
\end{aligned}$$

Damit existiert also ein $K > 0$, so dass $x^{t-1} \cdot e^{-x} \leq \frac{K}{x^2}$ für alle $x \geq 1$ gilt, und daher existiert das Integral $\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium.

Eigenschaften der Gammafunktion: Es gilt die *Funktionalgleichung der Gammafunktion*

$$(\forall t > 1) \quad \Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1).$$

Dies beweisen wir mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{y\to\infty} -y^{t-1}e^{-y} - \lim_{y\to 0} y^{t-1}e^{-y} + \int_0^\infty (t-1)x^{t-2}e^{-x}\,dx \\ &= 0 + 0 + (t-1)\Gamma(t-1),\end{aligned}$$

da $y^{t-1} \to 0$ wegen $t > 1$ gilt. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir speziell:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{y\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^y = \lim_{y\to\infty} 1 - e^{-y} = 1,$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Funktionalgleichung

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Dies erhält man durch Induktion: Für $n = 0$ haben wir $\Gamma(0+1) = 0! = 1$. Beim Induktionsschluss verwenden wir die Funktionalgleichung und rechnen $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$. ■

Beispiel VIII.15. (Fresnelsche Integrale) Durch Anwendung des Transformationssatzes mit $t = \varphi(u) = \sqrt{u}$ rechnet man

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \sin(t^2)\,dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$

(mittels $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \varphi'(u)\cdot du$). Wir fragen nach der Konvergenz dieses Integrals. Hierzu rufen wir uns zunächst in Erinnerung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle u zwischen $2k\pi$ und $(2k+1)\pi$ der Wert $\sin(u) \geq 0$ ist; zwischen $(2k+1)\pi$ und $(2k+2)\pi$ ist $\sin(u) \leq 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned}-\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du &= -\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin(u+\pi)}{\sqrt{u+\pi}}\,du \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}\,du \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du.\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du \leq -\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du.$$

Somit ist die Folge $a_n := (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$ nichtnegativ, monoton fallend, und es gilt

$$|a_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0.$$

Nach dem Leibnizkriterium existiert daher

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Sei nun $F(x) := \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$. Für $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ ist dann

$$\big|F(x) - F(n\pi)\big| = \left|\int_{n\pi}^{x} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du\right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0,$$

und somit existiert das uneigentliche Integral

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

nach dem Cauchykriterium VIII.9. Es sei bemerkt, dass der ursprüngliche Integrand $t \mapsto \sin(t^2)$ für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert. Wir haben sogar

$$\int_0^\infty \sin(u^2)\, du = \int_0^\infty 2t \cdot \sin(t^4)\, dt$$

(über die Transformationsformel mit $\varphi(t) = t^2$ und $\varphi'(t)\, dt = 2t\, dt$), und der Integrand ist in diesem Fall sogar unbeschränkt. ∎

Beispiel VIII.16. Wir betrachten das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}.$$

Hierzu verwendet man die Transformationsformel mit $\varphi(t) = \arcsin t$, also

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

für $0 \leq t < 1$ (Bemerkung V.4.17). Daher folgt

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1} \int_0^x \varphi'(t)\, dt = \lim_{x\to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$ ∎