VI. Integralrechnung

Nachdem wir im letzten Kapitel die Differentialrechnung kennengelernt haben, mit deren Hilfe es möglich ist, die Änderungsrate einer Funktion durch deren Ableitung zu beschreiben, wenden wir uns in diesem Abschnitt der Frage zu, wie man die Fläche berechnet, die ein Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt. Die Beobachtung, dass die Änderungsrate dieser Fläche bei fortschreitender rechter Grenze des Definitionsbereichs durch die Funktion gegeben ist, ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – eines der zentralen Resultate der Analysis der Funktionen von einer Veränderlichen. Insbesondere werden wir sehen, wie sich dieser Satz dazu verwenden lässt, viele konkrete Integrale explizit zu berechnen.

VI.1. Treppenfunktionen

Definition VI.1.1. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist ein $(n+1)$-Tupel

$$Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \quad \text{mit} \quad a = z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_n = b.$$

Die Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ heißt *feiner* als die Zerlegung $W = (w_0, \ldots, w_m)$, wenn $\{w_0, \ldots, w_m\} \subseteq \{z_0, \ldots, z_n\}$ gilt, d.h. wenn jeder Unterteilungspunkt von W auch ein Unterteilungspunkt von Z ist. Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, so sei $Z_1 \cup Z_2$ diejenige Zerlegung, die durch Vereinigung der Mengen der Unterteilungspunkte entsteht.

(b) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ von $[a, b]$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(t) = c_k \quad \text{für } z_{k-1} < t < z_k.$$

Wir sprechen dann von einer Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung Z. Von den Funktionswerten an den Unterteilungspunkten wird nichts verlangt. Wir schreiben T_a^b für die Menge der Treppenfunktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. ∎

Lemma VI.1.2. *Die Menge T_a^b ist ein reeller Vektorraum, d.h., für $f, g \in T_a^b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind $f + g$ und λf wieder Elemente von T_a^b.*

Beweis. Wegen $T_a^b \subseteq B([a,b])$ (beschränkte Funktionen) haben wir nur zu zeigen, dass T_a^b ein Untervektorraum ist. Für $f \in T_a^b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist klar, dass $\lambda f \in T_a^b$ ist. Sind f und g Elemente von T_a^b zu den Zerlegungen Z_1 und Z_2, so sind sie auch Treppenfunktionen zu der Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$. Also ist $f+g$ Treppenfunktion zu der Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$. Daher ist $T_a^b \subseteq B([a,b])$ unter Skalarmultiplikation und Addition abgeschlossen und somit ein Untervektorraum. ■

Satz VI.1.3. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit*

$$\|f - \varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|f(x) - \varphi(x)| : x \in [a,b]\} \leq \varepsilon.$$

Jede stetige Funktion lässt sich also gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.

Beweis. Nach Satz IV.1.24 ist f gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle x, y mit $|x-y| < \delta$. Wir wählen nun eine Zerlegung $Z := (z_0, \ldots, z_m)$ von $[a,b]$ mit $|z_{k+1} - z_k| < \delta$ für alle $k = 0, \ldots, m-1$ [1] und definieren die Funktion φ durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} f(z_k), & \text{für } z_k \leq t < z_{k+1}, k = 0, \ldots, m-1 \\ f(b), & \text{für } t = b. \end{cases}$$

Für $t \in [z_k, z_{k+1}[$ ist dann

$$|\varphi(t) - f(t)| \leq |\varphi(t) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(t)| \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon,$$

d.h. $\|f - \varphi\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$. ■

Folgerung VI.1.4. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varepsilon > 0$, so existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi = \varepsilon$.*

Beweis. Mit Satz VI.1.3 finden wir eine Treppenfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f - h\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann setzen wir $\varphi := h - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\psi := h + \frac{\varepsilon}{2}$. Nun ist $\psi - \varphi = \frac{\varepsilon}{2} - (-\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ und $\varphi = h - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq h + \frac{\varepsilon}{2} = \psi$. ■

Das Riemann-Integral

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die der Graph einer Funktion $f : [a,b] \to [0, \infty[$ mit der x-Achse einschließt, d.h. der Menge

$$F = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

[1] Z.B. eine äquidistante Zerlegung: $z_k = a + k\frac{b-a}{m}$, wobei m so groß gewählt ist, dass $\frac{b-a}{m} < \delta$ ist.

Wir werden sehen, dass sich diese Aufgabe für stetige Funktionen immer lösen lässt. Auch für Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitspunkten lassen sich diese Flächen berechnen. Als problematisch erweisen sich Funktionen, die „sehr oft“ springen, wie zum Beispiel die *Dirichletfunktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wir beginnen die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts bei den Treppenfunktionen.

Lemma VI.1.5. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ mit $f(x) = c_k$ für alle $z_{k-1} < x < z_k$, so hängt die Zahl*

$$S_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (z_k - z_{k-1})$$

nicht von der Zerlegung Z ab, d.h., für jede andere Zerlegung Z', bzgl. der f eine Treppenfunktion ist, gilt $S_{Z'}(f) = S_Z(f)$.

Beweis. Ist Z' eine andere Zerlegung, so dass f auf dem Innern der Zerlegungsintervalle konstant ist, so existiert eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'. Es reicht also zu sehen, dass $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$ gilt, wenn Z' durch Hinzunahme eines Punktes zu Z entsteht. Sei dazu $z \in [z_{k-1}, z_k]$ und $Z' = (z_0, \ldots, z_{k-1}, z, z_k, \ldots, z_n)$. In diesem Fall ist

$$c_k \cdot (z_k - z_{k-1}) = c_k(z_k - z) + c_k(z - z_{k-1}),$$

und daher $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion nach der Zahl der hinzugenommenen Punkte. ■

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ eine Zerlegung mit $f(x) = c_k$ für alle $x \in]z_{k-1}, z_k[$. Wir definieren das *Integral von f* durch

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (z_k - z_{k-1}).$$

Das ist dadurch gerechtfertigt, dass wir uns gerade davon überzeugt haben, dass die rechte Seite $S_Z(f)$ nicht von der Zerlegung Z abhängt.

Für $a = b$ setzen wir $\int_a^a f = 0$; ferner $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Die Zahl a heißt die *untere Grenze* des Integrals, die Zahl b die *obere Grenze*. Eine weitere Schreibweise für das Integral ist

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(t)\, dt.$$

Satz VI.1.6. *Das Integral von Treppenfunktionen hat folgende Eigenschaften:*

(I1) *Intervalladditivität: Für* $a \leq b \leq c$ *und* $f \in T_a^c$ *gilt*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(I2) *Monotonie: Sind* $f, g \in T_a^b$ *mit* $f \leq g$, *so ist* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(I3) *Linearität: Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und alle Treppenfunktionen* $f, g \in T_a^b$ *gilt*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(I4) *Normierung: Ist* f *auf* $[a,b]$ *konstant gleich* c, *so ist* $\int_a^b f = c \cdot (b-a)$.

Beweis. (I1): Ist Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,c]$, die den Punkt b enthält, so folgt (I1) direkt aus der Definition des Integrals.
(I2), (I3): Zuerst wählen wir eine gemeinsame Zerlegung Z für f und g. Es gelte $f(x) = c_k$ und $g(x) = d_k$ für $x \in]z_{k-1}, z_k[$.

Ist $f \leq g$, so ist $c_k \leq d_k$ für alle k und daher $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Andererseits haben wir $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda c_k + \mu d_k$ für alle $x \in]z_{k-1}, z_k[$. Hieraus folgt (I3).
(I4) ist klar. ∎

Definition VI.1.7. (a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir das *Oberintegral*

$$\int_a^{*b} f := \inf\Big\{ \int_a^b \psi : f \leq \psi,\ \psi \in T_a^b \Big\}$$

und das *Unterintegral*

$$\int_{*a}^{b} f := \sup\Big\{ \int_a^b \varphi : \varphi \leq f,\ \varphi \in T_a^b \Big\}.$$

Um die Endlichkeit dieser Werte einzusehen, beachten wir, dass aus der Beschränktheit von f die Existenz von $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f \leq M$ folgt. Insbesondere existieren $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Für solche Paare gilt $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$ wegen (I2). Insbesondere sind $\int_a^{*b} f$ und $\int_{*a}^b f$ reelle Zahlen mit

$$\int_{*a}^{b} f \leq \int_a^{*b} f.$$

(b) Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrabel (Riemann-integrierbar)*, wenn

$$\int_{*a}^{b} f = \int_a^{*b} f$$

gilt, d.h., wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \leq \varepsilon$ existieren. In diesem Fall definieren wir das *Riemann-Integral von* f durch

$$\int_a^b f := \int_a^{*b} f = \int_{*a}^b f$$

Die Menge der Riemann-integrablen Funktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit R_a^b. Wir bemerken, dass $T_a^b \subseteq R_a^b$ trivialerweise gilt. Für $f \in R_a^b$ definieren wir $\int_b^a f := -\int_a^b f$. ■

Beispiel: Ein wichtiges Beispiel, das die Subtilität des Integrierbarkeitsbegriff zeigt, ist die *Dirichlet-Funktion*:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da jedes offene Intervall reeller Zahlen eine rationale Zahl enthält, gelten für jedes Paar von Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ die Beziehungen $\varphi \leq 0$ und $1 \leq \psi$ bis auf endlich viele Punkte. Mit $0 \leq f \leq 1$ ergibt sich damit

$$\int_{*0}^1 f = 0 < 1 = \int_0^{*1} f.$$

Insbesondere ist f nicht Riemann-integrabel. ■

Satz VI.1.8. *Das Riemann-Integral hat folgende Eigenschaften:*

(I1) *Intervalladditivität: Für $a \leq b \leq c$ ist $f \in R_a^c$ genau dann, wenn $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$ gelten. In diesem Fall ist*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(I2) *Monotonie: Sind $f, g \in R_a^b$ mit $f \leq g$, so ist $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

(I3) *Linearität: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R_a^b$ ist $\lambda f + \mu g \in R_a^b$ mit*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(I4) *Normierung: Ist f auf $[a, b]$ konstant gleich c, so ist $\int_a^b f = c \cdot (b - a)$.*

Beweis. (I1) **Zwischenbehauptung:** Das Oberintegral ist intervalladditiv, d.h., für jede beschränkte Funktion $f\colon [a, c] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f.$$

Für $\psi \in T_a^c$ mit $f \le \psi$ gilt $\int_a^c \psi = \int_a^b \psi + \int_b^c \psi \ge \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f$, also auch

$$\int_a^{*c} f \ge \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f.$$

Seien nun $\psi_1 \in T_a^b$ und $\psi_2 \in T_b^c$ zwei Treppenfunktionen mit $\psi_1 \ge f|_{[a,b]}$ und $\psi_2 \ge f|_{[b,c]}$. Aus diesen erhält man eine neue Treppenfunktion durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \psi_1(x), & \text{falls } x \in [a,b[\\ \psi_2(x), & \text{falls } x \in [b,c]. \end{cases}$$

Diese neue Treppenfunktion ist Element von T_a^c, und es gilt $\psi \ge f$. Nun ist $\int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 = \int_a^c \psi \ge \int_a^{*c} f$, also auch

$$\int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f \ge \int_a^{*c} f,$$

denn für zwei nach unten beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Damit ist die Intervalladditivität des Oberintegrals gezeigt. Die analoge Aussage für Unterintegrale erhält man genauso und durch Zusammensetzen

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f \ge \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_{*a}^{c} f.$$

Ist nun $f \in R_a^c$, so ist $\int_a^{*c} f = \int_{*a}^{c} f$ und wir erhalten wegen $\int_a^{*b} f \ge \int_{*a}^{b} f$ und $\int_b^{*c} f \ge \int_{*b}^{c} f$ zwischen den inneren Summanden $\int_a^{*b} f = \int_{*a}^{b} f$ und $\int_b^{*c} f = \int_{*b}^{c} f$. Dies bedeutet $f\,|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f\,|_{[b,c]} \in R_b^c$. Ferner erhalten wir die Intervalladditivität.

Sind andererseits $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$, so gilt

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f = \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_{*a}^{c} f$$

und folglich $f \in R_a^c$. Auch in diesem Fall erhalten wir die gewünschte Gleichheit. Damit ist (I1) bewiesen.

(I2) Monotonie: Seien $f, g \in R_a^b$ und $f \le g$ auf $[a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f = \int_a^{*b} f &= \inf\left\{ \int_a^b \psi : f \le \psi,\ \psi \in T_a^b \right\} \\ &\le \inf\left\{ \int_a^b \psi : g \le \psi,\ \psi \in T_a^b \right\} = \int_a^{*b} g = \int_a^b g \end{aligned}$$

wegen

$$\Big\{\int_a^b \psi : f \le \psi,\ \psi \in T_a^b\Big\} \supseteq \Big\{\int_a^b \psi : g \le \psi,\ \psi \in T_a^b\Big\}.$$

(I3) Linearität: Seien $f, g \in R_a^b$ und φ und ψ zwei Treppenfunktionen mit $f \le \varphi$ und $g \le \psi$. Dann ist $f + g \le \varphi + \psi$, also

$$\int_a^{*b} f + g \le \int_a^b \varphi + \psi = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi.$$

Daher gilt nach Übergang zum Infimum auf der rechten Seite auch

$$\int_a^{*b} f + g \le \int_a^{*b} f + \int_a^{*b} g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Hierbei verwenden wir wieder die Ungleichung

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

für nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Ferner erhält man analog

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{*a}^b f + \int_{*a}^b g \le \int_{*a}^b f + g \le \int_a^{*b} f + g.$$

Diese zwei Ungleichungsketten zeigen, dass überall Gleichheit gilt; insbesondere folgt $\int_a^{*b} f + g = \int_{*a}^b f + g$, d.h. $f + g \in R_a^b$ und die Additivität des Integrals.

Wir zeigen noch $\lambda f \in R_a^b$ und $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei zunächst $\lambda > 0$. Dann gilt für jede Funktion $f \in R_a^b$:

$$\int_a^{*b} \lambda f = \lambda \int_a^{*b} f = \lambda \int_{*a}^b f = \int_{*a}^b \lambda f;$$

folglich ist $\lambda f \in R_a^b$ und $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f$. Ist $\lambda < 0$, also $\lambda = -|\lambda|$, und $f \le \psi$, so ist $\lambda f \ge \lambda \psi$. Es folgt

$$\int_{*a}^b \lambda f = \lambda \int_a^{*b} f = \lambda \int_{*a}^b f = \lambda \int_a^b f$$

und analog $\int_a^{*b} \lambda f = \lambda \int_{*a}^b f = \lambda \int_a^b f$, also $\lambda f \in R_a^b$ und $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f$.

(I4) ist klar (vgl. Satz VI.1.6). ∎

Bemerkung VI.1.9. Es gilt $\int_a^a f = 0$ für alle Funktionen

$$f : [a, a] = \{a\} \to \mathbb{R},$$

denn für alle Treppenfunktionen $\psi \in T_a^a$ ist $\int_a^a \psi = 0$. ∎

Satz VI.1.10. *Stetige Funktionen und monotone Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrabel.*

Beweis. (a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f nach Satz IV.1.12 beschränkt. Nach Folgerung VI.1.4 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Dann ist aber $\int_a^b \psi - \varphi = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$, und somit $f \in R_a^b$.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wegen $f(x) \in [f(a), f(b)]$ für $x \in [a,b]$ ist f beschränkt. Sei o.B.d.A. $f(a) \neq f(b)$ (sonst ist f konstant und die Behauptung trivial). Wir wählen eine Zerlegung $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ von $[a,b]$ mit $z_k - z_{k-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Nun definieren wir zwei Treppenfunktionen φ und $\psi \in T_a^b$ durch $\varphi(x) := f(z_k)$ bzw. $\psi(x) := f(z_{k+1})$ für $x \in [z_k, z_{k+1}[$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ und $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. Dann ist offensichtlich $\varphi \leq f \leq \psi$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \psi - \varphi \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(z_{k+1}) - f(z_k))\,(z_{k+1} - z_k) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(z_{k+1}) - f(z_k))\,\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,(f(z_n) - f(z_{n-1}) + f(z_{n-1}) - f(z_{n-2}) + \ldots + f(z_1) - f(z_0)) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,(f(b) - f(a)) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

und damit ist f Riemann-integrabel. Für monoton fallendes f geht man zu $-f$ über und beachtet, dass R_a^b ein Vektorraum ist. ■

Aufgabe VI.1. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x_+ := \max(x, 0) \quad \text{und} \quad x_- := \max(0, -x) = x_+ - x \geq 0.$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ die Beziehung

$$x_+ \leq y_+ \quad \text{und} \quad y_- \leq x_-.$$ ■

Lemma VI.1.11. *Für $f, g \in R_a^b$ sind die Funktionen*

$$f_+ := \max(f, 0), \quad f_- := \max(-f, 0), \quad \max(f, g), \quad \min(f, g) \quad \textit{und} \quad |f|$$

integrabel.

Beweis. Es ist $f_- = f_+ - f$, $|f| = f_+ + f_-$, $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ sowie $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$. Wegen Satz VI.1.8 reicht es aus, die Integrabilität von f_+ zu zeigen.

Dazu seien zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ gegeben, für die $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon$ gilt. Dann gelten auch $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und

$$\int_a^b \psi_+ - \varphi_+ \leq \int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon,$$

da $\psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi$ aus $\psi_+ - \psi = \psi_- \leq \varphi_- = \varphi_+ - \varphi$ folgt (Aufgabe VI.1). ■

Integralabschätzung

Satz VI.1.12. *Für $a \leq b$ und $f \in R_a^b$ gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Beweis. Aus Lemma VI.1.11 erhalten wir $|f| \in R_a^b$. Weiter ist $-|f| \leq f \leq |f|$, also wegen der Monotonie des Integrals $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Hieraus folgt $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. ■

Lemma VI.1.13. *Für $f, g \in R_a^b$ ist auch $f \cdot g \in R_a^b$.*

Beweis. Wegen $f \cdot g = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$ haben wir wegen (I3) nur $f^2 \in R_a^b$ zu zeigen. Wegen $|f| \in R_a^b$ (Lemma VI.1.11) und $f^2 = |f|^2$ dürfen wir sogar $f \geq 0$ annehmen.

Sei $\varepsilon > 0$ und $M := \sup f([a,b])$. Dann existieren $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit

$$0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq M \quad \text{und} \quad \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

In der Tat finden wir zunächst $\varphi_0, \psi_0 \in T_a^b$ mit $\varphi_0 \leq f \leq \psi_0$ und $\int_a^b(\psi_0 - \varphi_0) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Dann setzen wir $\varphi := \max(0, \varphi_0)$ und $\psi := \min(M, \psi_0)$ und erhalten $\varphi_0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq \psi_0$.

Damit sind $\varphi^2, \psi^2 \in T_a^b$, $\varphi^2 \leq f^2 \leq \psi^2$ und

$$\int_a^b \psi^2 - \varphi^2 = \int_a^b \underbrace{(\psi + \varphi)}_{\leq 2M}(\psi - \varphi) \leq \int_a^b 2M(\psi - \varphi) \leq 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Also ist $f^2 \in R_a^b$. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz VI.1.14. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g \in R_a^b$ *sowie* $g \geq 0$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Für $g = 1$ *folgt insbesondere*

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b - a)$$

für ein $\xi \in [a,b]$.

Beweis. Sei $m = \min f([a,b])$ und $M = \max f([a,b])$. Wegen $g \geq 0$ ist dann $mg \leq fg \leq Mg$, also $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$. Beachte hierbei, dass $\int_a^b fg$ wegen Lemma VI.1.13 existiert. Wir wenden jetzt den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $F(x) := f(x) \int_a^b g$ an. Da F die beiden Werte $m \int_a^b g$ und $M \int_a^b g$ annimmt, existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \int_a^b g = \int_a^b fg$. ∎

VI.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir zeigen nun, dass Ableiten und Integrieren zueinander inverse Operationen sind. In diesem Abschnitt sei D ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält.

Definition VI.2.1. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine *Stammfunktion* von $f : D \to \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. ∎

Beachte: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$, also ist $F_1 - F_2$ konstant (vgl. Folgerung V.2.3).

HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Satz VI.2.2. *Sei* D *ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Ist* $a \in D$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, so ist die Funktion*

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f$$

eine Stammfunktion von f *auf* D. *Ist umgekehrt* F *eine Stammfunktion von* f *auf* D, *so gilt für alle* $x \in D$:

$$\int_a^x f = F(x) - F(a) =: [F]_a^x.$$

Beweis. Für $x, x + h \in D$ ist nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz VI.1.14)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(x + \theta_h h)$$

für ein $\theta_h \in [0,1]$. Folglich ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Daher ist F eine Stammfunktion zu f. Ist $\widetilde{F}$ eine weitere Stammfunktion zu f, so ist $\widetilde{F} - F$ konstant, also

$$\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(a) = F(x) - F(a) = \int_a^x f. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: Alternativ kann man den Hauptsatz auch direkt, also ohne den Mittelwertsatz beweisen. Sei dazu $x \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zunächst ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für $|x-y| \leq \delta$ gilt. Für $|h| \leq \delta$ ergibt sich damit

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) + f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt,$$

und daher

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon.$$

Damit haben wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

gezeigt. $\blacksquare$

Der wesentliche Vorteil des Hauptsatzes ist, dass er uns ein Mittel in die Hand gibt, um Integrale wirklich auszurechnen, indem wir eine Stammfunktion bestimmen. In der Regel ist das technisch einfacher als direkt zu integrieren.

Bemerkung VI.2.3. (Unbestimmte Integrale) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mindestens zwei Punkten. Auf der Menge $C(D)$ der stetigen Funktionen $D \to \mathbb{R}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$F \sim G :\Longleftrightarrow F - G \quad \text{ist konstant.}$$

Wir schreiben $[F] := \{G : G \sim F\}$ für die Äquivalenzklasse der Funktion F, d.h. für die Menge der Funktionen der Gestalt $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ist F differenzierbar, so sind alle zu F äquivalenten Funktionen G differenzierbar mit $F' = G'$.

Ist umgekehrt $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so definieren wir das *unbestimmte Integral* auf D durch

$$\int f(x)\; dx := [F] = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Ein unbestimmtes Integral ist also eine Menge von Funktionen und **keine Funktion**. Die Bezeichnung wird dadurch gerechtfertigt, dass

$$F(b) - F(a) = [F]_a^b = \int_a^b f(x)\; dx$$

für alle $a, b \in D$ gilt (Satz VI.2.2) und nicht von der Wahl des speziellen Repräsentanten F in der Äquivalenzklasse $[F]$ abhängt. $\blacksquare$

Beispiel VI.2.4. (a) Für eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion.

(b) Für $f = \exp$ ist $F = \exp$ eine Stammfunktion.

(c) Sei $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Für $f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ ist $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ eine Stammfunktion. Ist $\alpha = -1$ und $f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, so ist $F(x) = \log x$ eine Stammfunktion. Speziell ist für alle $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \log x - \log 1 = \log x.$$

(d) Auf dem Intervall $]-\infty, 0[$ erhalten wir für die Funktion $F(x) := \log(-x)$ ebenfalls $F'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Daher ist $\log |x|$ auf dem ganzen Bereich $\mathbb{R}^\times$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Da $\mathbb{R}^\times$ in zwei Intervalle zerfällt, erhält man alle Stammfunktionen von $\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}^\times$ durch

$$F(x) := \begin{cases} \log x + c & \text{für } x > 0 \\ \log(-x) + d & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

wobei $c, d \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. ■

Jede Regel der Differentialrechnung zieht eine Regel der Integralrechnung nach sich. Aus der Kettenregel wird so die Transformationsformel:

TRANSFORMATIONSFORMEL/SUBSTITUTIONSREGEL

Satz VI.2.5. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a, b] \to D$ stetig differenzierbar, so ist $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ Riemann-integrabel und es gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass die stetige Funktion $(f \circ \varphi)\varphi'$ nach Lemma VI.1.13 auf $[a, b]$ integrabel ist. Wir betrachten die Funktionen

$$F : D \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_{\varphi(a)}^x f(u)\ du \quad \text{und} \quad G := F \circ \varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Nach dem Hauptsatz ist F differenzierbar mit $F' = f$ und nach der Kettenregel ist G differenzierbar mit $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, d.h., G ist eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\varphi'$ auf dem Intervall D. Folglich ist

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du. \quad ■$$

Beispiel VI.2.6. Gesucht ist für $y > 0$ das Integral $\int_0^y x\sqrt{1+x}\,dx$. Zuerst stellen wir fest, dass der Integrand auf $[0,y]$ stetig ist und das Integral daher definiert ist. Wir setzen $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$, d.h. $x = \varphi(x)^2 - 1$. Nach der Kettenregel gilt $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\varphi(x)}$. Somit können wir rechnen:

$$\begin{aligned}
&\int_0^y x\sqrt{1+x}\,dx \\
&= \int_0^y \big(\varphi(x)^2 - 1\big)\,\varphi(x)\,dx = \int_0^y \big(\varphi(x)^2 - 1\big)\,\varphi(x)\cdot \underbrace{2\varphi(x)\varphi'(x)}_{=1}\,dx \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(y)} (u^2-1)2u^2\,du = 2\int_1^{\sqrt{1+y}} u^4 - u^2\,du = 2\Big[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{1+y}} \\
&= \frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Indem man den Kalkül der unbestimmten Integrale verwendet, lassen sich Stammfunktionen oft direkter bestimmen. Für das obige Beispiel geht man hier wie folgt vor.

Gesucht ist das unbestimmte Integral $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ auf $D =]-1,\infty[$. Mit

$$u = \sqrt{1+x}, \qquad x = u^2 - 1$$

erhalten wir

$$\frac{dx}{du} = 2u$$

und daher haben wir im Sinne unbestimmter Integrale

$$\begin{aligned}
&\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (u^2-1)u\frac{dx}{du}\,du \\
&= \int (u^2-1)2u^2\,du = \big[\tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\big] = \big[\tfrac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \tfrac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3\big].
\end{aligned}$$

Wir erkennen nun, dass durch

$$F(x) := \tfrac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \tfrac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3$$

auf $]-1,\infty[$ eine Stammfunktion von $f(x) = x\sqrt{1+x}$ gegeben ist und können jedes Integral über ein Teilintervall von D leicht durch Einsetzen der Grenzen berechnen, z.B. ist

$$\int_0^y x\sqrt{1+x}\,dx = F(y) - F(0) = \tfrac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \big(\tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{3}\big).$$

Man beachte, dass die Rechnungen in beiden Fällen sinngemäß die gleichen waren, aber dass man auf der Ebene der unbestimmten Integrale mit den formalen Regeln

$$dx = \frac{dx}{du}du \quad \text{bzw.} \quad du = \frac{du}{dx}dx,$$

die der Substitutionsregel entsprechen, leichter rechnen kann. ■

Anwendungen der Transformationsformel: Es gelten

- $\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\ dx$ (setze $\varphi(t) = t + c$)
- $c\int_a^b f(ct)\,dt = \int_{ca}^{cb} f(x)\ dx$ (setze $\varphi(t) = ct$)
- $\int_a^b t^{n-1} f(t^n)\,dt = \frac{1}{n}\int_{a^n}^{b^n} f(x)\ dx$ (setze $\varphi(t) = t^n$). ∎

Lemma VI.2.7. *Ist $f : [a,b] \to f([a,b])$ streng monoton und differenzierbar, so existiert auf $f([a,b])$ die inverse Funktion $f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$, und es gilt:*

$$\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = b \cdot f(b) - a \cdot f(a).$$

Beachte, dass f und f^{-1} beide stetig und monoton sind, also auf $[a,b]$ bzw. auf $f([a,b])$ integrierbar.

Beweis. Wir setzen

$$g(x) := \int_a^x f + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1} \ - x \cdot f(x) + a \cdot f(a).$$

Dann ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) - 1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x) \\ &= f(x) + xf'(x) - f(x) - xf'(x) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist g konstant, also $g(b) = g(a) = 0$. ∎

Hinter dem obigen Lemma steht folgende algebraische Überlegung. Ist G eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} und F eine Stammfunktion von f, so ist

$$(G \circ f)'(x) = (G' \circ f)(x) \cdot f'(x) = xf'(x) = (xf)'(x) - f(x).$$

Daher ist die Funktion $G(f(x)) + F(x) - xf(x)$ konstant, so dass $G(y) := f^{-1}(y)y - F(f^{-1}(y))$ eine Stammfunktion von f^{-1} liefert.

Partielle Integration

Satz VI.2.8. *Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Beweis. Die Funktion $h := f \cdot g$ ist Stammfunktion von $f \cdot g' + f' \cdot g$. Also gilt

$$\int_a^b (f \cdot g' + f' \cdot g) = h(b) - h(a) = \big[f \cdot g\big]_a^b.$$ ∎

Beispiel VI.2.9. (a) Für $g(x) = x$ erhält man die Formel

$$(T) \qquad \int_a^b f = \big[f \cdot x\big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot x \; dx.$$

Speziell ergibt sich für $f = \log$ auf $D =]0, \infty[$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \log x \; dx &= \big[x \cdot \log x\big]_a^b - \int_a^b \log'(x) \cdot x \; dx = \big[x \cdot \log x\big]_a^b - \int_a^b \tfrac{x}{x} \; dx \\ &= \big[x \cdot \log x - x\big]_a^b,\end{aligned}$$

d.h. $h(x) := x \log x - x$ ist eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion.

Mit unbestimmten Integralen berechnet man dies wie folgt:

$$\int \log x \; dx = [x \log x] - \int \log'(x) x \; dx = [x \log x] - \int 1 dx = [x \log x - x].$$

Man beachte, dass man hierbei mit Klassen von Funktionen rechnet.

(b) Sei

$$A_m(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dann erhalten wir mit (T):

$$\begin{aligned}A_m(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^m}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t \cdot 2t \cdot m}{(1+t^2)^{m+1}} \, dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{m+1}} \, dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m A_m(x) - 2m A_{m+1}(x).\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich eine Rekursionsformel zur Berechnung dieser Integrale:

$$A_{m+1}(x) = \frac{2m-1}{2m} A_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)},$$

wobei

$$A_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$$

ist (vgl. Bemerkung V.4.16(5)). ■

VI.3. Integrale und Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt stellen wir uns die Frage, inwieweit das Integrieren und das Ableiten mit der Konvergenz von Funktionenfolgen verträglich ist. Für die Integration ist das recht unproblematisch: gleichmäßige Konvergenz reicht hier aus, um Grenzübergang und Integration zu vertauschen. Bei der Differentiation ist es etwas subtiler, denn hier wird man fordern, dass die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert und der Tatsache Rechnung tragen, dass eine Funktion nicht eindeutig durch ihre Ableitung bestimmt ist.

Um unsere Intuition zu schärfen, betrachten wir zuerst einige Beispiele.

Beispiel VI.3.1. Wir betrachten wieder die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0, & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Funktionen integrieren.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x \, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2 (\tfrac{2}{n} - x) \, dx = n^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{n}} + n^2 \left[-\tfrac{1}{2} (\tfrac{2}{n} - x)^2 \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\ &= n^2 \frac{1}{2n^2} + n^2 \frac{1}{2n^2} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ (vgl. Beispiel IV.2.2). Im allgemeinen ist also

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n. \qquad \blacksquare$$

Vertauschen von Grenzübergang und Integral

Satz VI.3.2. *Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sind alle Folgenglieder f_n integrabel, so ist auch f integrabel und*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} = \sup_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für $n > N_\varepsilon$ (gleichmäßige Konvergenz). Da f_n integrabel ist, existieren $\psi_n, \varphi_n \in T_a^b$ mit $\varphi_n \le f_n \le \psi_n$ und $\int_a^b \psi_n - \varphi_n < \varepsilon$. Dann ist auch

$$\varphi_n - \varepsilon \le f_n - \varepsilon \le f \le f_n + \varepsilon \le \psi_n + \varepsilon.$$

Weiter gilt

$$\int_a^b (\psi_n + \varepsilon) - (\varphi_n - \varepsilon) = 2\varepsilon(b-a) + \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \leq 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist daher $f \in R_a^b$. Aus $\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$ folgt weiter mit Satz VI.1.12:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \varepsilon(b-a).$$

Hieraus schließen wir $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. ■

Vertauschen von Grenzübergang und Ableitung

Satz VI.3.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen.*

(1) *Für einen Punkt $p \in D$ sei die Folge $\big(f_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und*

(2) *die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent.*

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, und es gilt

$$f' = \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis. Für $x \in D$ gilt erhalten wir aus dem Hauptsatz $f_n(x) = f_n(p) + \int_p^x f_n'(t)\, dt$. Also existiert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(p) + \lim_{n\to\infty} \int_p^x f_n'(t)\, dt = f(p) + \int_p^x \big(\lim_{n\to\infty} f_n'\big)(t)\, dt$$

nach Satz VI.3.2. Daher existiert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise. Da $\lim_{n\to\infty} f_n'$ nach Satz IV.2.12 stetig ist, ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$. ■

Bemerkung VI.3.4. (a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Satz VI.3.3 konvergiert auf jedem Intervall der Gestalt $[a,b] \subseteq D$ gleichmäßig, denn für jedes $x \in [a,b]$ gilt

$$\begin{aligned} & |f(x) - f_n(x)| \\ \leq\ & |f(p) - f_n(p)| + \Big| \int_p^x f' - f_n' \Big| \leq |f(p) - f_n(p)| + |x-p| \cdot \|f' - f_n'\|_D \\ \leq\ & |f(p) - f_n(p)| + \max(|b-p|, |a-p|) \cdot \|f' - f_n'\|_D. \end{aligned}$$

(b) Die Voraussetzung des Satzes sind nicht überflüssig, denn die Folge $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$ konvergiert auf $D = \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen 0, aber die Folge $f_n'(x) = \cos(nx)$ der Ableitungen nicht. Es ist also

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f_n'.$$ ■

Ableitung und Integration von Potenzreihen

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ eine reelle Potenzreihe, so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n(x-p)^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-p)^{n+1}}{n+1}$$

ihre *formale Ableitung* bzw. ihr *formales Integral*.

Satz VI.3.5. (a) *Die formale Ableitung und das formale Integral einer Potenzreihe haben den gleichen Konvergenzradius R wie die Reihe selbst.*

(b) *Ist*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k \quad \textit{für} \ \ |x-p| < R,$$

so ist $f :]\,p-R, p+R\,[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k(x-p)^{k-1};$$

ferner ist

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-p)^{k+1}}{k+1}$$

auf $]\,p-R, p+R\,[$ eine Stammfunktion von f.

Beweis. Nach der Formel von Hadamard ist

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Für $x \neq p$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n = (x-p)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^{n-1} = (x-p)\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(x-p)^n.$$

Also haben die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(x-p)^n$ den gleichen Konvergenzradius und die Hadamardsche Formel liefert

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+2}|}} = \cdots = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+k}|}}$$

für all $k \in \mathbb{N}$. Da wir aus Lemma III.4.10 die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$$

kennen, erhalten wir

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot |a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}.$$

Aus obigen Vorüberlegungen schließen wir nun, dass die formale Ableitung und das formale Integral beide den Konvergenzradius R besitzen.

Ist $r < R$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ gleichmäßig für $|x-p| \leq r$ (Satz IV.2.17). Nach Satz VI.3.2 gilt also für $|x-p| < R$:

$$\begin{aligned}\int_p^x f(t)\,dt &= \int_p^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-p)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_p^x a_k(t-p)^k\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-p)^{k+1}}{k+1} = F(x).\end{aligned}$$

Damit ist das formale Integral F eine Stammfunktion von f auf $]\,p-R, p+R\,[$. Ist $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n(x-p)^{n-1}$ die Funktion auf $]\,p-R, p+R\,[$, die wir durch die Konvergenz der formalen Ableitung der Potenzreihe von f erhalten, so folgt wie oben, dass f eine Stammfunktion von g ist, d.h. $f' = g$. ■

Folgerung: Wird die Funktion f auf dem Intervall $]p-R, p+R[$ durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt, so ist sie dort beliebig oft differenzierbar. ■

Bemerkung VI.3.6. (1) Für $|x| < 1$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}.$$

Nach Satz VI.3.5 erhalten wir für $|x| < 1$ die Reihenentwicklung der Arcustangensfunktion

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergent. Mit dem Abelschen Grenzwertsatz (den wir nicht behandelt haben) kann man sogar zeigen, dass

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x\to 1} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots .$$

(2) Für $|x| < 1$ ist

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Analog zu (1) folgt für $|x| < 1$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Insbesondere erhalten wir mit dem Leibnizkriterium und dem Abelschen Grenzwertsatz die Beziehung

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots . \qquad \blacksquare$$

Anhang: Der Abelsche Grenzwertsatz

Um die Stetigkeitseigenschaften von Funktionen zu verstehen, die auf einem reellen Intervall durch eine konvergente Potenzreihe beschrieben werden, ist der Abelsche Grenzwertsatz das zentrale Hilfsmittel, denn er ermöglicht uns, Aussagen über die Stetigkeit am Rande des Konvergenzintervalls zu machen.

Ist $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ durch eine auf D konvergente reelle Potenzreihe gegeben und R ihr Konvergenzradius, so konvergiert die Reihe auf jedem Intervall der Form $[p-r, p+r]$, $r < R$, gleichmäßig (Satz IV.2.15). Daher ist die Grenzfunktion $f|_{]p-R,p+R[}$ auf $]p-R, p+R[$ stetig (Satz IV.2.12). Wir wollen nun zeigen, dass die Konvergenz in den Randpunkten auch die Stetigkeit von f in diesen Punkten zur Folge hat.

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, so bilden wir die zugehörige Differenzenfolge:

$$\Delta A_0 := A_0, \quad \Delta A_n := A_n - A_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Dann ist $A_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta A_k$.

Lemma VI.3.7. *Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen komplexer Zahlen, wobei wir $A_{-1} = B_{-1}$ setzen.*

(a) *Produktregel:*

$$\Delta(A \cdot B)_k = \Delta A_k \cdot B_k + A_{k-1} \cdot \Delta B_k \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b) *Partielle Summation:*

$$\sum_{k=0}^{n} (\Delta A_k) B_k = A_n B_n - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}(\Delta B_k) \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Zu (a) rechnen wir

$$\begin{aligned}\Delta(AB)_k &= A_k B_k - A_{k-1} B_{k-1} = (A_k - A_{k-1}) B_k + A_{k-1}(B_k - B_{k-1}) \\ &= (\Delta A_k) B_k + A_{k-1}(\Delta B_k)\end{aligned}$$

und zu (b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(\Delta A_k)B_k + \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}(\Delta B_k) &= \sum_{k=0}^{n}(\Delta A_k)B_k + A_{k-1}(\Delta B_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta(A\cdot B)_k = A_nB_n.\end{aligned}$$

■

Satz VI.3.8. *Konvergiert eine reelle Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-p)^k$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[p,b]$, so konvergiert sie dort gleichmäßig. Insbesondere stellt eine Potenzreihe auf ihrem reellen Konvergenzbereich eine (auch in den Randpunkten) stetige Funktion dar.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $b > p$ annehmen. Durch Anwenden der Transformation $x \mapsto \frac{x}{b-p} + p$ geht die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-p)^k$ über in die Potenzreieh $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(b-p)^k} x^k$, die für alle $x \in [0,1]$ konvergiert. Wir dürfen daher o.B.d.A. $p = 0$ und $b = 1$ annehmen.

Unsere Voraussetzung besagt nun, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert und wir wollen hieraus auf die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k$ mit $f_k(x) = a_k x^k$ auf dem Intervall $[0,1]$ schließen.

Sei $\varepsilon > 0$. Wenden wir das Cauchykriterium für Reihen auf $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ an, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=m}^{n} c_k| < \varepsilon$ für alle $N \le m \le n$. Wir wenden nun partielle Summation an mit

$$A_n := \sum_{k=m}^{n} c_k \quad \text{und} \quad B_n = x^n$$

(beachte, dass $A_n = 0$ für $n < m$ gilt). Wir erhalten wegen Lemma VI.3.7 daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} c_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n}(\Delta A_k)B_k &= A_n \cdot B_n - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1}(\Delta B_k)\\ &= A_n \cdot B_n - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1}(x^k - x^{k-1})\\ &= A_n \cdot x^n - (x-1)\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}\cdot x^{k-1}.\end{aligned}$$

Nach der Wahl von m gilt $|A_n| = |\sum_{k=m}^{n} c_k| < \varepsilon$ für alle $n \ge m$, und damit folgt für alle $x \in [0,1]$:

$$\left|A_n x^n + (1-x)\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}x^{k-1}\right| \le \varepsilon + (1-x)\cdot\varepsilon\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \varepsilon + \varepsilon\cdot(1-x^n) \le 2\varepsilon,$$

das heißt, $\left|\sum_{k=m}^{n} c_k x^k\right| \le 2\varepsilon$ für alle $n \ge m$ und $x \in [0,1]$, d.h.

$$\|f_m + \ldots + f_n\|_{[0,1]} \le 2\varepsilon \quad \text{für} \quad N \le m \le n.$$

Nach dem Cauchykriterium für Funktionenfolgen (Satz IV.2.10) ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ daher auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent. Die Stetigkeit der Grenzfunktion f folgt aus Satz IV.2.12. ■

VII. Taylorreihen

In diesem Kapitel werden wir eine Methode kennenlernen, differenzierbare Funktionen lokal durch Polynome zu approximieren. Im gleichen Sinne wie die Differenzierbarkeit einer Funktion es erlaubt, sie lokal durch eine affine Funktion anzunähern, werden wir sehen, dass die n-malige Differenzierbarkeit die lokale Approximierbarkeit durch Polynome n-ten Grades liefert. Die Methoden dieses Abschnitts sind eine zentrale Grundlage für viele Anwendungen der Analysis, da sie es erlauben, mit Näherungen zu rechnen, wenn die exakten Formeln zu kompliziert werden.

In diesem Abschnitt steht D immer für ein Intervall in $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Punkte enthält.

VII.1. Taylorentwicklung

Um die Grundidee der Taylorentwicklung zu verstehen, betrachten wir zunächst eine Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-p)^k$ auf $\mathbb{R}$. Durch m-faches Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{[m]}(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)\cdot(x-p)^{k-m} \\ &= \sum_{k=m}^{n} a_k \binom{k}{m} m! \cdot (x-p)^{k-m}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $f^{[m]}(p) = a_m \cdot m!$. Daher ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(p)}{k!}(x-p)^k. \tag{1.1}$$

Diese Formel zeigt insbesondere, dass jedes Polynom vom Grade $\leq n$ eindeutig durch seine Ableitungen bis zur Ordnung n im Punkte p bestimmt ist.

Beachte: Dass wir das Polynom f direkt in der Gestalt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-p)^k$ geschrieben haben, stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Denn ist zunächst $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n b_k\big((x-p)+p\big)^k = \sum_{k=0}^n b_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(x-p)^j \cdot p^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^n b_k \binom{k}{j} p^{k-j}\right)(x-p)^j. \end{aligned}$$

Jedes Polynom in x lässt sich also auch als Polynom in $x-p$ schreiben. ∎

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Problem beschäftigen, zu einer n-mal differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grade n zu finden, das sich in einem Punkt $p \in D$ möglichst gut an f anschmiegt. Die Formel (1.1) zeigt uns, wie wir das zu tun haben.

Definition VII.1.1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $p \in D$. Dann heißt

$$T_p^n(f)(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{[k]}(p)}{k!} t^k$$

das *n-te Taylorpolynom von f bei p.* Ist f in einer Umgebung von p beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe

$$T_p^\infty(f)(t) := \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{[k]}(p)}{k!} t^k$$

die *Taylorreihe von f bei p.* ∎

Bemerkung VII.1.2. Das n-te Taylorpolynom $T_p^n(f)$ ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$ mit

$$T_p^n(f)^{[k]}(0) = f^{[k]}(p) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Dies bedeutet, dass die Ableitungen bis zur Ordnung n des Restgliedes

$$r_n(x) := f(x) - T_p^n(f)(x-p)$$

in p verschwinden. Für $n = 1$ ist

$$T_p^1(f)(x-p) = f(p) + (x-p) \cdot f'(p)$$

diejenige affine Funktion, die sich in p am besten an f in dem Sinne anschmiegt, dass sie in p den gleichen Wert und die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n besitzt. ∎

Definition VII.1.3. $r_n(x) := f(x) - T_p^n(f)(x-p)$ heißt das *n-te Restglied von f bei p*. Beachte, dass für $k = 0, \ldots, n$ die Beziehung $r_n^{[k]}(p) = 0$ gilt. ■

Satz von Taylor—Taylorformel

Satz VII.1.4. *Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und f eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sowie $p, x \in D$. Dann gilt*

$$f(x) = T_p^n(f)(x-p) + r_n(x) \qquad \textit{mit} \qquad r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n \cdot f^{[n+1]}(t)\,dt.$$

Beweis. Es ist nur die Integraldarstellung des Restglieds $r_n(x)$ zu beweisen. Zunächst ist $r_n^{[k]}(p) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$, und wegen $\big(T_p^n\big)^{[n+1]} \equiv 0$ ist $r_n^{[n+1]} = f^{[n+1]}$. Wir berechnen das Integral durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_p^x (x-t)^n f^{[n+1]}(t)\,dt &= \int_p^x (x-t)^n r_n^{[n+1]}(t)\,dt \\ &= \Big[(x-t)^n \cdot r_n^{[n]}(t)\Big]_p^x + \int_p^x n(x-t)^{n-1} r_n^{[n]}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ist $n > 0$, so ist $(x-x)^n = 0$ und $r_n^{[n]}(p) = 0$, also

$$\int_p^x (x-t)^n r_n^{[n+1]}(t)\,dt = n\int_p^x (x-t)^{n-1} r_n^{[n]}(t)\,dt.$$

Induktiv erhalten wir:

$$\int_p^x (x-t)^n \cdot r_n^{[n+1]}(t)\,dt = n!\int_p^x r_n'(t)\,dt = n!\big(r_n(x) - r_n(p)\big) = n! r_n(x).$$ ■

Bemerkung VII.1.5. Für $n = 0$ liefert der Taylorsche Satz VII.1.4

$$f(x) = f(p) + \int_p^x f'(t)\,dt,$$

was wir schon aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennen. ■

Die einfachste Darstellung des Restglieds ist die folgende. Sie ist für viele Abschätzungen sehr wichtig.

Restglieddarstellung nach Lagrange

Satz VII.1.6. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus* VII.1.4 *existiert ein ξ zwischen x und p mit*

$$r_n(x) = \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1]}(\xi).$$

Beweis. Sei zunächst $p \leq x$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung VI.1.14 existiert ein $\xi \in [p, x]$ mit

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_p^x \underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0} f^{[n+1]}(t)\, dt = f^{[n+1]}(\xi) \cdot \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n\, dt \\ &= f^{[n+1]}(\xi) \cdot \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Für $x < p$ ist $(t-x)^n \geq 0$ und somit der Mittelwertsatz der Integralrechnung auch anwendbar. ■

Beachte: Das Lagrange-Restglied hat dieselbe Gestalt wie alle anderen Glieder des Taylorpolynoms, nur dass $f^{[n+1]}$ nicht an p sondern in ξ ausgewertet wird.

Bemerkung VII.1.7. Unter den Voraussetzungen von Satz VII.1.4 folgt direkt aus Satz VII.1.6 wegen der Stetigkeit von $f^{[n+1]}$ in p:

$$\lim_{x \to p} \frac{r_n(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{f^{[n+1]}(p)}{(n+1)!}.$$

Die Abbildung

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{r_n(x)}{(x-p)^{n+1}}, & \text{falls } x \neq p \\ \dfrac{f^{[n+1]}(p)}{(n+1)!}, & \text{falls } x = p \end{cases}$$

ist also stetig und es gilt

$$f(x) = T_p^n(f)(x-p) + (x-p)^{n+1}\psi(x).$$

Beachte, dass dies für $n = 1$ analog zur Definition der Differenzierbarkeit ist (vgl. Lemma V.1.5). ■

Der folgende Satz ist eine Verschärfung der Restglieddarstellung von Lagrange, denn hier wird $f^{[n+1]}$ nicht als stetig vorausgesetzt und θ_x liegt im offenen Intervall $]0, 1[$.

Satz VII.1.8. (Verschärfte Restglieddarstellung von Lagrange) *Die Funktion f sei im Intervall $[p, p+x]$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert ein $\theta_x \in \,]0,1[$ mit*

$$f(p+x) = T_p^n(f)(x) + \frac{f^{[n+1]}(p+\theta_x \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Beweis. Wir wenden den allgemeinen Mittelwertsatz (Satz V.3.1) mit

$$r(x) = f(p+x) - T_p^n(f)(x) \quad \text{und} \quad g(x) = x^{n+1}$$

an. Wir erhalten hiermit induktiv

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{x^{n+1}} &= \frac{r'(\theta_1 x)}{(n+1)(\theta_1 x)^n} = \frac{r''(\theta_1\theta_2 x)}{(n+1)n(\theta_1\theta_2 x)^{n-1}} \\ &= \ldots = \frac{r^{[n+1]}(\theta_1 \ldots \theta_{n+1} x)}{(n+1)!} = \frac{f^{[n+1]}(p+\theta_x \cdot x)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit $\theta_x := \theta_1 \cdots \theta_{n+1} \in \,]0,1[$. ■

Beispiel VII.1.9. Die Taylorentwicklung kann man insbesondere zur effizienten Berechnung von Grenzwerten verwenden. Wir diskutieren hierzu ein Beispiel. Gesucht sei $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Setze $f(x) := 1 - \cos x$. Dann ist $f(0) = 0 = f'(0)$ und $f''(0) = \cos 0 = 1$. Es folgt $f(x) = 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + x^3 \cdot \psi(x)$ mit einer stetigen Funktion ψ (Folgerung VII.1.7). Also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} x\psi(x) = \frac{1}{2} + 0 \cdot \psi(0) = \frac{1}{2}$$ ■

Das Konvergenzverhalten von Taylorreihen ist in der Regel **sehr schlecht**. Ist f in einer Umgebung von p beliebig oft differenzierbar, so muß die Taylorreihe

$$\big(T_p^\infty f\big)(x-p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{[k]}(p)}{k!}(x-p)^k$$

trotzdem nicht konvergieren. Und wenn sie konvergiert, so *muß sie nicht gegen $f(x)$ konvergieren!* Man betrachte hierzu die Taylorreihe $T_0^\infty(f)$ der Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ aus Bemerkung V.2.10. In diesem Fall verschwindet die Taylorreihe, aber trotzdem ist $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Der folgende Satz von Borel zeigt sogar, dass jede Folge als Koeffizientenfolge einer Taylorreihe auftreten kann.

Satz von Borel: *Für jede Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{[n]}(0) = n!a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.* ■

Für den Beweis verweisen wir auf Satz 4.5 in Th. Bröcker's „Analysis I“. Der folgende Satz zeigt wenigstens, dass Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen dargestellt werden, mit ihrer Taylorreihe übereinstimmen.

Satz VII.1.10. *Ist f in einer Umgebung von p durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt, so stimmt diese mit der Taylorreihe von f in p überein.*

Beweis. Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ für $|x-p| < r$, so ist gemäß Satz VI.3.5:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \cdot (x-p)^{k-n},$$

also $f^{[n]}(p) = n!\, a_n$ und somit $a_n = \frac{f^{[n]}(p)}{n!}$. ■

Satz VII.1.11. *Sei f auf D beliebig oft differenzierbar und $M > 0$ mit*

$$\sup_{x \in D} |f^{[n]}(x)| \leq M \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$f(x) = T_p^{\infty}(f)(x-p)$$

für alle $x \in D$, d.h., die Funktion f wird durch ihre Taylorreihe dargestellt.

Beweis. Mit Satz VII.1.6 erhalten wir

$$|r_n(x)| = \frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{n+1}(\xi) \right| \leq M \cdot \frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

da $e^{|x-p|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |x-p|^n$ konvergiert. Also gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_p^n(f)(x-p) = T_p^{\infty}(f)(x-p).$$ ■

Beispiel VII.1.12. (1) Für $f(x) = \cos(x)$ gilt

$$f^{[4n]}(x) = \cos x, \quad f^{[4n+1]}(x) = -\sin x$$

und

$$f^{[4n+2]}(x) = -\cos x \quad \text{und} \quad f^{[4n+3]}(x) = \sin x.$$

Die Voraussetzungen von Satz VII.1.11 sind also erfüllt, und wir haben für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = T_0^{\infty}(\cos)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{[n]}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{[2n]}(0)}{2n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

(2) Analog deutet man die Reihenentwicklung der Sinusfunktion:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$ ■

Satz VII.1.13. (Die binomische Reihe) *Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \textit{mit} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Beweis. Für $a_k := \binom{\alpha}{k} x^k$ ist $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1} x a_k$. Wegen $\left|\frac{\alpha-k}{k+1} x\right| \to |x|$ folgt die Konvergenz der Reihe für $|x| < 1$ aus dem Quotientenkriterium. Wir setzen $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ für $|x| < 1$. Dann ist f gliedweise differenzierbar (Satz VI.3.5), also gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)\cdot f'(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} k \cdot x^{k-1} \\
&= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1} \\
&= \alpha(1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^{k-1} \\
&= \alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^k\right) \\
&= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\right)x^k\right) \\
&= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\right) = \alpha\cdot f(x).
\end{aligned}$$

Wir erhalten $(1+x)\cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x)$. Weiter ist $f(0) = 1 = (1+0)^\alpha$. Für $g(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$ gilt daher $g(0) = 1$ und

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} \\
&= \frac{\alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1} - \alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.
\end{aligned}$$

Die differenzierbare Funktion g ist also auf dem Intervall $D =]-1,1[$ konstant 1. Daher gilt $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$. ∎

Beachte: Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist $(1+x)^\alpha$ ein Polynom. Die Reihe bricht nach dem $(\alpha+1)$-ten Glied ab, da $\binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > \alpha$ gilt. Spezialfälle sind:

- $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
- $\dfrac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$
- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots,$

denn

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\end{aligned}$$

Man erhält aus der obigen Diskussion eine brauchbare Näherungsformel für die Wurzelfunktion:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \qquad \text{für „kleine“ } x.$$

Insbesondere in der Speziellen Relativitätstheorie werden oft Näherungen des Typs

$$\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

verwendet.

Beispiel VII.1.14. Für die Funktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ erhalten wir für $|x| < 1$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}.$$

Wegen $\arcsin(0) = 0$ erhalten wir aus Satz VI.3.2 damit die Entwicklung

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Und wegen

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2n+1} = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}\frac{1}{2n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n+1)(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}$$

ist

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots .$$

■

VII.2. Rechnen mit Taylorreihen

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $0 \in D$, die im Nullpunkt mindestens n-mal differenzierbar ist, setzen wir $T^n(f) := T_0^n(f)$ (das n-te Taylorpolynom in 0). Ist f beliebig oft differenzierbar, so setzen wir $T(f) := T_0^\infty(f)$.

Die allgemeine Produktregel/Leibnizformel

Satz VII.2.1. *Sind f und g beide n-mal differenzierbare Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, so gilt*

$$(f \cdot g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} \cdot g^{[n-k]}.$$

Beweis. Übung. ∎

Satz VII.2.2. *Sind f und g im Nullpunkt mindestens n-mal differenzierbar, so gelten*

(1) $T^n(f+g) = T^n(f) + T^n(g)$ *und*

(2) $T^n(f \cdot g) = T^n\big(T^n(f) \cdot T^n(g)\big)$.

Beweis. (1) Dies folgt sofort aus $(f+g)^{[k]}(0) = f^{[k]}(0) + g^{[k]}(0)$ für $0 \le k \le n$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} & T^n(f)(x)\, T^n(g)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} x^k \sum_{l=0}^{n} \frac{g^{[l]}(0)}{l!} x^l \\ &= \sum_{k+l \le n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} \frac{g^{[l]}(0)}{l!} x^{k+l} + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{2n} \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{[k]}(0) \cdot g^{[m-k]}(0) \right) \cdot x^m + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{2n} \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Produktregel (Satz VII.2.1) erhalten wir also

$$T^n\big(T^n(f) \cdot T^n(g)\big)(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} (f \cdot g)^{[m]}(0) \cdot x^m = T^n(f \cdot g)(x). \qquad ∎$$

Anschaulich bedeutet Teil (2) des vorigen Satzes, dass man das Taylorpolynom von $f \cdot g$ erhält, indem man die Taylorpolynome $T^n(f)$ und $T^n(g)$

multipliziert und anschließend alle Terme der Ordnung $\geq n+1$ weglässt: Für $T_p^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{[k]}(p)x^k$ und $T_p^n(g)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{[k]}(p)x^k$ ist

$$\begin{aligned} T_p^n(f\cdot g)(x) &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{[k]}(p)\cdot g^{[m-k]}(p)\right)\cdot x^m \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=0}^m \frac{f^{[k]}(p)}{k!}\frac{g^{[m-k]}(p)}{(m-k)!}\right)\cdot x^m. \end{aligned}$$

Beispiel VII.2.3. (a) Gesucht ist die Taylorreihe von

$$x \mapsto \frac{\log(1+x)}{1+x}$$

in $p = 0$. Für $|x| < 1$ haben wir schon gesehen, dass

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{x^k}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k \text{ (geometrische Reihe)}$$

gilt, wobei die Reihen absolut konvergieren. Wegen Satz VII.2.1 und der absoluten Konvergenz der Reihen, dürfen wir die Taylorreihe des Produktes mit der Cauchy-Produktformel berechnen und erhalten daher

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1)^{n-k}\right)\cdot x^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k}\right)\cdot x^n.$$

(b) Hat die Funktion $f(x) := x(1+x-\cos x)$ ein Extremum am Nullpunkt? Hierzu berechnen wir das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f.

Für $g(x) = 1+x-\cos x$ ist $T_0(g)(x) = 1+x-\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$, also $T_0^2(g)(x) = x + \frac{x^2}{2}$. Ferner ist $T_0^2(h)(x) = x$ für $h(x) = x$. Durch Zusammensetzen erhält man

$$T_0^2(f)(x) = T_0^2(g\cdot h)(x) = T_0^2\big(T_0^2(g)\cdot T_0^2(h)\big)(x) = x^2,$$

da $(x+\frac{x^2}{2})x = x^2 + \frac{x^3}{2}$. Man erkennt also, dass $f(0) = 0 = f'(0)$ und $f''(0) = 2 > 0$ ist, so dass f im Nullpunkt ein isoliertes Minimum besitzt. ■

Beispiel VII.2.4. (Methode der unbestimmten Koeffizienten) Genügt eine Funktion f einer Gleichung oder einer Differentialgleichung (dies ist eine Gleichung, in der auch Ableitungen von f vorkommen), so kann man f als Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ ansetzen und bestimmt hieraus die Koeffizienten a_n, soweit dies möglich ist. Danach bestimmt man den Konvergenzbereich der so erhaltenen Potenzreihe.

(a) Gesucht ist die Taylorentwicklung des Tangens im Nullpunkt. Wir haben die Differentialgleichung $\tan' = 1 + \tan^2$; ferner wissen wir $\tan(0) = 0$.

Wir machen nun den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $f(0) = 0$ und $f' = 1 + f^2$. Aus $f(0) = 0$ erhalten wir $a_0 = 0$. Durch gliedweises Ableiten erhalten wir weiter

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung $f' = 1 + f^2$ liefert

$$1 + f(x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} \right) \cdot x^n.$$

Falls f der Differentialgleichung genügt, müssen diese beiden Reihen übereinstimmen, weswegen wir einen Koeffizientenvergleich für die a_n anstellen können. Wir erhalten für $n = 0$ die Beziehung $a_1 = 1 + a_0^2 = 1$ und ferner eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten mit höherem Index:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Die sechs ersten Koeffizienten errechnen sich mit Hilfe dieser Rekursionsgleichung zu

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(a_0 a_1 + a_1 a_0) = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}(a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5}(a_1 a_3 + a_3 a_1) = \frac{2}{15}.$$

Wir stellen nun zwei Behauptungen auf.

(1) Es gilt $a_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dies zeigt man durch Induktion: Wir wissen schon, dass $a_0 = 0$ ist. Für $n \geq 0$ ist

$$a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2} \sum_{k=1}^{2n} a_k \cdot a_{2n+1-k}.$$

Ist in dieser Summe der Index k ungerade, so ist $2n+1-k$ gerade und umgekehrt. Damit ist die ganze Summe 0, da nach der Induktionsannahme $a_{2k} = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$ gilt.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq a_n \leq 1$.

Aus der Rekursionsformel folgt sofort $0 \leq a_n$ für alle n; speziell ist $0 \leq a_0 \leq 1$. Ist nun $0 \leq a_k \leq 1$ für $k = 0, \ldots, n$, so folgt auch

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Damit ist insbesondere auch $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ und somit der Konvergenzradius der Reihe ≥ 1. Wir erhalten also eine Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$. Gemäß unserer Konstruktion ist $f(0) = 0$ und $f' = 1 + f^2 \geq 1$ (Satz VI.3.2). Damit ist f streng monoton wachsend, also $f :]-1,1[\to f(]-1,1[)$ umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion $f^{-1} : f(]-1,1[) \to]-1,1[$, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + f(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wegen $f^{-1}(0) = 0$ ist damit $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$ und folglich $f(x) = \tan x$ für $|x| < 1$. Wir haben also gesehen, dass sich die Tangensfunktion auf dem Intervall $]-1,1[$ durch eine Potenzreihe

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

darstellen lässt. Die Koeffizienten erhält man aus der obigen Rekursionsformel.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist also

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

und ebense $f(0) = \frac{1}{1!} = 1$. Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ durch eien konvergente Potenzreihe darstellbar und daher beliebig oft differenzierbar (Satz VI.3.2).

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0$, und folglich ist

$$g(x) := \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen nun für die Funktion g wie oben eine Potenzreihe an:

$$T_0(g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n.$$

Die Koeffizienten $\beta_n = g^{[n]}(0)$ heißen *Bernoulli-Zahlen.*

Die Gleichung $g(x)f(x) = 1$ liefert $g(x)(e^x - 1) = x$, also $T_0(g) \cdot T_0(e^x - 1) = x$, das heißt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich $\beta_0 = g(0) = 1$. Für $n \geq 2$ erhält man aus der Summe eine Rekursionsgleichung für β_{n-1}:

$$\beta_{n-1} = -(n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}.$$

Damit können wir weitere Bernoulli-Zahlen berechnen:

$$\beta_1 = -\frac{\beta_0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -2! \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} \right) = -2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

und

$$\beta_4 = -4! \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{1}{6 \cdot 2!\, 3!} \right) = - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{30}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\beta_{2k+1} = 0$: Hierzu betrachten wir die um $\beta_1 x$ modifizierte Funktion g.

$$\begin{aligned} g(x) + \tfrac{1}{2}x &= \frac{x}{e^x - 1} + \tfrac{1}{2}x = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(e^x - 1)\right)}{e^x - 1} \\ &= \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})} = \frac{x}{2} \frac{\cosh(\frac{x}{2})}{\sinh(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen sinh und cosh jeweils definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Wir schließen hieraus, dass $g(x) + \frac{1}{2}x$ eine gerade Funktion ist. Also gilt

$$g^{[2k+1]}(0) = \beta_{2k+1} = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung VII.2.6. Es gilt

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} (-1)^{n+1} \beta_{2n} x^{2n-1} \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Die Bernoullizahlen liefern also auch die Entwicklung der Tangensfunktion (sogar für $|x| < \frac{\pi}{2}$). ■

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung der Kettenregel zu. Die Kettenregel macht eine Aussage über die Ableitung einer Komposition von Funktionen:

$$\big(g \circ f\big)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Die Ableitung einer Funktion bekommt man aus ihrem Taylorpolynom erster Ordnung. Man kann die Kettenregel wie folgt mit Taylorpolynomen schreiben:

$$T_p^1(g \circ f) = T_{f(p)}^1(g) \cdot T_p^1(f).$$

Diese Regel lässt sich verallgemeinern.

Allgemeine Kettenregel

Satz VII.2.7. *Gegeben seien n-mal differenzierbare Funktionen*

$$f : D \to B \subseteq \mathbb{R}, \quad g : B \to \mathbb{R}$$

und ein Punkt $p \in D$ mit $f(p) = q$. Dann gilt

$$T_p^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_q^n(g) \circ (T_p^n(f) - q)\big).$$

Beweis. Ersetzen wir f durch $x \mapsto f(p+x) - q$ und g durch $x \mapsto g(x+q)$, so dürfen wir $p = q = 0$ annehmen. Für den Spezialfall, dass $g(y) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell y^\ell$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ ist, liefert Satz VII.2.2(2)

$$\begin{aligned} T_0^n(g \circ f) &= \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot T_0^n(f^\ell) = \sum_{\ell=0}^n a_j \cdot T_0^n\big(T_0^n(f)^\ell\big) = T_0^n\left(\sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot T_0^n(f)^\ell\right) \\ &= T_0^n\big(g \circ T_0^n(f)\big) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big), \end{aligned}$$

da $g = T_0^n(g))$ ist. Für eine allgemeine Funktion g setzen wir $\widetilde{g} := g - T_0^n(g)$. Dann ist $T_0^n(g)$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$, und wir erhalten

$$T_0^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ f\big) + T_0^n(\widetilde{g} \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big) + T_0^n(\widetilde{g} \circ f).$$

Wir behaupten nun, dass $T_0^n(\widetilde{g} \circ f) = 0$ ist. Dies zeigen wir, indem wir durch Induktion nach k nachweisen, dass aus $h^{[j]}(0) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, k \leq n$ die Beziehung $T_0^k(h \circ f) = 0$ folgt. Diese Aussage können wir dann auf $h = \widetilde{g}$ anwenden.

(A) Für $k = 0$ ist $T_0^0(h \circ f)(0) = h(f(0)) = h(0) = 0$.

(S) $k \to k+1$: Für $k < n$ haben wir

$$\begin{aligned} \big(h \circ f\big)^{[k+1]}(0) &= \big((h \circ f)'\big)^{[k]}(0) = \big((h' \circ f) \cdot f'\big)^{[k]}(0) \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \underbrace{\big(h' \circ f\big)^{[m]}(0)}_{=0} \cdot f^{[k+1-m]}(0), \end{aligned}$$

denn wir können die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion h' anwenden, deren Ableitungen bis zur Ordnung k in 0 verschwindet. Damit ist

$$\big(h \circ f\big)^{[k+1]}(0) = 0.$$

Die Induktion zeigt jetzt, dass $\big(h \circ f\big)^{[k]}(0) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ gilt, folglich $T_0^n(h \circ f) = 0$. Wir haben also

$$T_0^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big)$$

gezeigt. ∎

Beispiel VII.2.8. Wie berechnet man die dritte Ableitung von $g \circ f$? Man schreibt $T_q^3(g)(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$, wobei $a_j = \frac{g^{[j]}(q)}{j!}$ ist, und

$$T_p^3(f)(x) - q = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad \text{mit} \quad b_j = \frac{f^{[j]}(p)}{j!}.$$

Die gerade bewiesene Aussage entspricht dann

$$T_p^3(g \circ f) = T_0^3\big(T_q^3(g) \circ (T_p^3(f) - q)\big).$$

Den Term dritter Ordnung erhält man durch Einsetzen:

$$a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = \frac{(g \circ f)'''(p)}{3!}.$$

Die allgemeine Formel lautet:

$$(g \circ f)'''(p) = g'(q) f'''(p) + 3g''(q) f'(p) f''(p) + g'''(q)\big(f'(p)\big)^3. \qquad \blacksquare$$

VIII. Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt werden wir die Integration verwenden, um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Hierbei wird sich eine interessante Analogie zwischen unendlichen Reihen und den sogenannten uneigentlichen Integralen zeigen. Aus dieser Korrespondenz lassen sich sehr feine Resultate über das Konvergenzverhalten von Reihen gewinnen, da uns nun der Kalkül der Differentialrechnung zur Verfügung steht.

Definition VIII.1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in]a, \infty]$. Weiter sei $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für alle $x \in [a, b[$ die Einschränkung $f|_{[a,x]}$ Riemann-integrabel ist. Falls er existiert, heißt der Grenzwert

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\,dt$$

das *uneigentliche Integral von f auf* $[a, b[$. Die Integrale $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ heißen *Partialintegrale* (analog zu den Partialsummen von Reihen). Analog definiert man uneigentliche Integrale für $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, wenn f auf allen Intervallen $[x, b]$, $x \in]a, b]$ Riemann-integrabel ist. ■

Bemerkung VIII.2. Ist $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt$. Die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b F'(t)\,dt$ ist also äquivalent zur Existenz des Grenzwerts $\lim_{x \nearrow b} F(x)$. ■

Der folgende Satz zeigt, dass wir Reihen als eine spezielle Form von uneigentlichen Integralen ansehen dürfen.

Satz VIII.3. *Ist* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *eine Reihe, so definieren wir*

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \ t \mapsto a_k \quad \text{für} \quad k \le t < k + 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral* $\int_0^\infty f(t)\,dt$ *existiert. In diesem Fall sind beide Werte gleich.*

Beweis. Für $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ und $n \le x < n + 1$ ist

$$F(x) = \int_0^n f(t)\,dt + \int_n^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + (x - n) \cdot a_n.$$

Insbesondere ist $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Existiert nun das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$, so existiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Konvergiert andererseits die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$, so ist für ausreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [n, n+1[$:

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|(x-n)a_n - \sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| \le |a_n| + \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Wegen obiger Bemerkung verwundert es nicht, dass sich einige Konvergenzsätze für Reihen auf uneigentliche Integrale übertragen lassen.

Satz über die monotone Konvergenz

Satz VIII.4. *Ist $f \ge 0$ und $f|_{[a,x]} \in R_a^x$ für alle $x \in [a, b[$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ genau dann, wenn die Funktion $F : [a,b[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ beschränkt ist.*

Beweis. Wir setzen $s := \sup F([a,b[)$. Wir nehmen zuerst $s < \infty$ an. Da das Partialintegral F monoton wächst (beachte $f \ge 0$) und für ein $x \in [a,b[$ die Beziehung $F(x) > s - \varepsilon$ gilt, erhalten wir $F(y) > s - \varepsilon$ für alle $y \in [x, b[$. Also ist $|s - F(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in [x,b[$. Hieraus folgt $\lim_{x\to b} F(x) = s$.

Ist $s = \infty$, so folgt analog $\lim_{x\to b} F(x) = \infty$, d.h., das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ existiert nicht. ■

Majorantenkriterium

Satz VIII.5. *Ist $0 \le f \le g$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(t)\,dt$, so existiert auch $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Beweis. Dies folgt wegen $\int_a^x f \le \int_a^x g \le \int_a^b g$ aus Satz VIII.4. ■

Beispiel VIII.6. Sei $a = 1$, $b = \infty$ und $f(x) = x^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$. Dann ist

$$F(x) = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1-x^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha \ne 1 \\ \log x, & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Für $\alpha < 1$ ist $1 - \alpha > 0$ und folglich $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = \infty$, d.h. $\int_1^\infty t^{-\alpha}\,dt$ existiert nicht. Für $\alpha = 1$ existiert $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ ebenfalls nicht, da $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$. Für $\alpha > 1$ jedoch ist $1 - \alpha < 0$ und daher $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = 0$. In diesem Fall existiert das Integral, und es gilt für $\alpha > 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}. \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass diese Rechnung viel einfacher war als diejenige, die wir gemacht haben, um die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ auf Konvergenz zu untersuchen. Man sieht also, dass der Kalkül der Differential- und Integralrechnung vieles einfacher macht. Wie man Ergebnisse über Reihen aus solchen für uneigentliche Integrale direkt gewinnen kann, zeigt der folgende Satz:

Satz VIII.7. *Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(t)\, dt$$

nicht negativ, monoton wachsend, und sie konvergiert mit

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1).$$

Insbesondere konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(t)\, dt$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert.

Beweis. Da f monoton fallend ist, ist $f \mid_{[1,x]}$ für alle $x \geq 1$ integrabel (vgl. Satz VI.1.10). Aus der Monotonie ergibt sich

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k). \tag{7.1}$$

Also ist insbesondere $a_k - a_{k-1} \geq 0$ und mit $a_0 = 0$ sehen wir, dass die Folge (a_k) nichtnegativ und monoton wachsend ist. Weiter erhalten wir aus (7.1) durch Summation

$$a_n \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt nun, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Die Beziehung

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1)$$

folgt aus $0 \leq a_n \leq f(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und der Rest der Behauptung direkt aus dem Bewiesenen und Satz VIII.4. ∎

Beispiel VIII.8. (a) Wir wenden Satz VIII.7 auf die Funktion $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ an $(\alpha > 0)$. Dann existiert das Integral

$$\int_1^\infty f(t)\, dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

nach Beispiel VIII.6 genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist. Nach dem vorstehenden Satz ist dies genau dann der Fall, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

konvergiert. Wir erhalten sogar die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \leq f(1) = 1,$$

das heißt

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Für $\alpha > 1$ schreibt man

$$\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Die Funktion $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt *Riemannsche Zetafunktion.* Sie spielt in der Zahlentheorie, als Funktion im Komplexen, eine zentrale Rolle.

Wegen $\zeta(\alpha) \geq \frac{1}{1^\alpha} = 1$ und $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ist

$$\lim_{\alpha \to \infty} \zeta(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to 1} \zeta(\alpha) = \infty.$$

(b) Für $\alpha = 1$ erhalten wir wie im Beweis von Satz VIII.7:

$$\log(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log n.$$

Die nach Satz VIII.7 konvergente Folge

$$a_n := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \log n$$

hat als Grenzwert die *Euler-Mascheronische Konstante*

$$c := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772\ldots,$$

d.h., die harmonische Reihe wächst genauso wie $\log n$. ■

Wir übertragen jetzt noch einige Konvergenzkriterien für Reihen auf uneigentliche Integrale.

Satz VIII.9. (Cauchykriterium) *Sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, und es gebe mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D, die gegen b konvergiert. Dann existiert $\lim_{x \to b} F(x)$ genau dann, wenn gilt:*

(1) $b \neq \pm\infty$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, z \in U_\delta(b) \cap D) : |F(x) - F(z)| < \varepsilon$.

(2) $b = \infty$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x, z \in D, x, z > N) : |F(x) - F(z)| \leq \varepsilon$.

(3) $b = -\infty$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x, z \in D, x, z < -N) : |F(x) - F(z)| \leq \varepsilon$.

Beweis. Sei zunächst $b \neq \pm\infty$.

Wir nehmen zuerst an, dass $a := \lim_{x\to b} F(x)$ existiert. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|F(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|F(z) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x, z \in D \cap U_\delta(b)$. Damit ist

$$|F(x) - F(z)| \le |F(x) - a| + |a - F(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sei nun (1) erfüllt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to b$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ gemäß (1) gewählt. Wegen $x_n \to b$ existiert ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - b| < \delta$ für alle $n > N_\delta$. Damit ist $|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\delta$. Die Folge $\big(F(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und daher konvergent. Sei $a := \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in D mit $y_n \to b$, so konvergiert auch die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots)$ gegen b. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = a.$$

Der Grenzwert hängt also nicht von der gewählten Folge ab, d.h. $\lim_{x\to b} F(x) = b$.

Die Fälle $b = \pm\infty$ behandelt man analog. ■

Wir wollen das Cauchysche Konvergenzkriterium insbesondere auf uneigentliche Integrale anwenden, d.h., wir betrachten

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in D = [a, b[.$$

Definition VIII.10. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ heißt *absolut konvergent*, wenn das Integral $\int_a^b |f(t)|\,dt$ konvergiert. ■

Satz VIII.11. *Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral konvergiert.*

Beweis. Für $x \ge a$ sei $F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$ und $G(x) := \int_a^x |f(x)|\,dx$. Dann gilt für $z \le x$:

$$|F(z) - F(x)| = \Big|\int_x^z f(t)\,dt\Big| \le \int_x^z |f(t)|\,dt = G(z) - G(x).$$

Die Behauptung folgt nun, indem wir das Cauchysche Konvergenzkriterium VIII.9 verwenden, um die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to b} F(x)$ einzusehen. ■

Folgerung VIII.12. *Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die von höherer als erster Ordnung in ∞ verschwindet, d.h. es existieren $\alpha > 1$, ein $c > a$ und ein $K > 0$, so dass für alle $t \ge c$ gilt $|f(t)| \le \frac{K}{t^\alpha}$. Dann konvergiert das Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ absolut. Gilt dagegen $f(t) \ge \frac{K}{t}$ für ein $K > 0$ und alle $t \ge c$, so divergiert das Integral.*

Beweis. Ist $f(t) \ge \frac{K}{t}$ für $t \ge c \ge a$, so würden wir aus der Konvergenz des Integrals $\int_c^\infty f(t)\,dt$ nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\int_c^\infty \frac{dt}{t}$ folgern können. Folglich ist das Integral $\int_c^\infty f(t)\,dt$ und damit auch $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergent.

Gilt hingegen $|f(t)| \leq \frac{K}{t^\alpha}$ für $\alpha > 1$ und alle $t \geq c$, so folgt die Konvergenz des Integrals $\int_c^\infty |f(t)|\,dt$ aus dem Majorantenkriterium, Satz VIII.11 und Beispiel VIII.6, d.h., das Integral

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^\infty f(t)\,dt$$

ist absolut konvergent. ■

Beispiel VIII.13. Wegen $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ für $x \geq 1$ konvergiert das Integral $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$. Wir wissen schon, dass $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$ ist. ■

Natürlich betrachtet man auch Integrale, die an beiden Integralenden „uneigentlich“ sind. Allgemein definieren wir

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f \quad \text{und} \quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

für $a < b < c$, wenn es sich an den Intervallenden $a, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ um uneigentliche Integrale handelt.

Beispiel VIII.14. (Die Gammafunktion) Für jedes $t > 0$ konvergiert das Integral

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x}\,dx$$

(die *Gamma-Funktion*), wobei das Integral an beiden Intervallenden als uneigentliches Integral zu verstehen ist. Für alle $x \geq 0$ ist $x^{t-1}e^{-x} \leq x^{t-1}$, und somit existiert das folgende uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium

$$\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}\,dx = \lim_{y\to 0} \int_y^1 x^{t-1}e^{-x}\,dx,$$

denn es gilt

$$\int_0^1 x^{t-1}\,dx = \lim_{x\to 0} \int_x^1 s^{t-1}\,ds = \lim_{x\to 0} \left[\frac{s^t}{t}\right]_x^1 = \frac{1}{t} - \lim_{x\to 0} \frac{x^t}{t} = \frac{1}{t}.$$

Weiter gilt:

$$x^2 \cdot (x^{t-1}e^{-x}) = x^{t+1}e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Nach den de l'Hospitalschen Regeln ist nämlich

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} (t+1)\frac{x^t}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} (t+1)\cdot t\frac{x^{t-1}}{e^x} = 0, \qquad \text{falls } t \in]0,1] \text{ ist, da } x^{t-1} \leq 1 \\
&= \lim_{x\to\infty} (t+1)\cdot t\cdot(t-1)\frac{x^{t-2}}{e^x} = 0, \qquad \text{falls } t \in]1,2] \text{ ist, da } x^{t-2} \leq 1 \\
&\ldots .
\end{aligned}$$

Damit existiert also ein $K > 0$, so dass $x^{t-1} \cdot e^{-x} \leq \frac{K}{x^2}$ für alle $x \geq 1$ gilt, und daher existiert das Integral $\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}\, dx$ nach dem Majorantenkriterium.

Eigenschaften der Gammafunktion: Es gilt die *Funktionalgleichung der Gammafunktion*

$$(\forall t > 1) \quad \Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1).$$

Dies beweisen wir mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{y\to\infty} -y^{t-1}e^{-y} - \lim_{y\to 0} y^{t-1}e^{-y} + \int_0^\infty (t-1)x^{t-2}e^{-x}\, dx \\ &= 0 + 0 + (t-1)\Gamma(t-1),\end{aligned}$$

da $y^{t-1} \to 0$ wegen $t > 1$ gilt. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir speziell:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{y\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^y = \lim_{y\to\infty} 1 - e^{-y} = 1,$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Funktionalgleichung

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Dies erhält man durch Induktion: Für $n = 0$ haben wir $\Gamma(0+1) = 0! = 1$. Beim Induktionsschluss verwenden wir die Funktionalgleichung und rechnen $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$. ■

Beispiel VIII.15. (Fresnelsche Integrale) Durch Anwendung des Transformationssatzes mit $t = \varphi(u) = \sqrt{u}$ rechnet man

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \sin(t^2)\, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

(mittels $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \varphi'(u) \cdot du$). Wir fragen nach der Konvergenz dieses Integrals. Hierzu rufen wir uns zunächst in Erinnerung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle u zwischen $2k\pi$ und $(2k+1)\pi$ der Wert $\sin(u) \geq 0$ ist; zwischen $(2k+1)\pi$ und $(2k+2)\pi$ ist $\sin(u) \leq 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned}-\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du &= -\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{\sqrt{u+\pi}}\, du \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}\, du \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \leq -\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Somit ist die Folge $a_n := (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$ nichtnegativ, monoton fallend, und es gilt

$$|a_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0.$$

Nach dem Leibnizkriterium existiert daher

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Sei nun $F(x) := \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$. Für $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ ist dann

$$\big|F(x) - F(n\pi)\big| = \left|\int_{n\pi}^{x} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du\right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0,$$

und somit existiert das uneigentliche Integral

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

nach dem Cauchykriterium VIII.9. Es sei bemerkt, dass der ursprüngliche Integrand $t \mapsto \sin(t^2)$ für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert. Wir haben sogar

$$\int_0^\infty \sin(u^2)\, du = \int_0^\infty 2t \cdot \sin(t^4)\, dt$$

(über die Transformationsformel mit $\varphi(t) = t^2$ und $\varphi'(t)\, dt = 2t\, dt$), und der Integrand ist in diesem Fall sogar unbeschränkt. ∎

Beispiel VIII.16. Wir betrachten das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}.$$

Hierzu verwendet man die Transformationsformel mit $\varphi(t) = \arcsin t$, also

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

für $0 \leq t < 1$ (Bemerkung V.4.17). Daher folgt

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1} \int_0^x \varphi'(t)\, dt = \lim_{x\to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}. \qquad ∎$$