Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 14, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 50 (Volumen unter einer Fläche I).

Bestimme das Volumen der Menge, die durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und die Ebenen $y + z = 4$ und $z = 0$ begrenzt wird. (Skizze!)

Man ueberlegt sich schnell, dass $z = 4 - y$ ueber den Kreis $x^2 + y^2 = 4$ integriert werden muss. Daher gilt fuer das Volumen in Polarkoordinaten

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r\sin\varphi)\, r dr d\varphi = 16\pi.$$

G 51 (Volumen unter einer Fläche II).

Bestimme das Volumen der Menge, die vom Paraboloid $x^2 + y^2 = 4z$, dem Zylinder $x^2 + y^2 = 8y$ und der Ebene $z = 0$ eingeschlossen wird. (Skizze!)

Das gesuchte Volumen erhaelt man, indem man $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ ueber den Kreis $x^2 + y^2 = 8y$ integriert. Mit Polarkoordinaten erhaelt man das Volumen durch Integration von $z = \frac{1}{4}r^2$ ueber dem Kreis $r(\varphi) = 8\sin(\varphi)$. Dann ist

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{8\sin(\varphi)} z\, r dr d\varphi = 96\pi.$$

G 52 (Bohrungen).

Bestimme das Volumen der Menge, die aus einer Kugel mit dem Radius $2a$ herausgebohrt wird, wenn das Loch den Radius a hat und die Achse des Lochs ein Durchmesser der Kugel ist. (Skizze!)

Das gesuchte Volumen ist das Achtfache des Volumens, das im ersten Oktanten durch den Zylinder $r^2 = a^2$, die Kugel $r^2 + z^2 = 4a^2$ und die Ebene $z = 0$ begrenzt wird. Letzteres erhaelt man durch Integration von $z = \sqrt{4a^2 - r^2}$ ueber einem Quandranten des Kreises $r = a$. Daher ist

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{4a^2 - r^2}\, r dr d\varphi = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi.$$

G 53 (Volumen zwischen zwei Flächen I).

Bestimme das Volumen der Menge, die von dem Kugel $r^2 + z^2 = a^2$ und dem Zylinder

$$Z := \{(x, y, z) |\, x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\ z \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0, \pi]\},$$

für $a > 0$ und $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(\varphi) := a\sin\varphi$, eingeschloßen wird. (Skizze!)

Aehnlich wie in den vorangegangen Aufgaben ueberlegt man sich, dass das gesuchte Volumen gegeben ist durch

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sin\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\, rdrd\varphi = \frac{2(3\pi-4)a^3}{9}.$$

Hausübung

H 55 (Volumen zwischen zwei Flächen II).

Bestimme das Volumen der Menge in $x^2+y^2=9$, die nach unten durch $x^2+y^2+4z=16$ und nach oben durch $z=4$ begrenzt wird.

Wie in Aufgabe G50 ueberlegt man sich, dass das gesuchte Volumen gegeben ist durch

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 4-(4-\frac{r^2}{4})\, rdrd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{r^2}{4}\, rdrd\varphi = \frac{81\pi}{8}.$$

H 56 (Berechnung eines Integrals I).

Berechne folgendes Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^2 zr^2\sin\varphi\, dzdrd\varphi$$

Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^2 zr^2\sin\varphi\, dzdrd\varphi = \frac{2}{3}.$$

H 57 (Berechnung eines Integrals II).

Berechne das Integral von

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad f(r,\varphi,z)=r^2$$

über dem Bereich R, der vom dem Paraboloid $r^2=9-z$ und der Ebene $z=0$ begrenzt wird. (Skizze!)

Man integriere zuerst bezueglich z von $z=0$ bis $z=9-r^2$, dann bezueglich r von $r=0$ bis $r=3$ und schliesslich bezueglich φ von $\varphi=0$ bis $varphi=2\pi$. Dann ist

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^2\varphi = \frac{243\pi}{2}.$$

H 58 (Berechnung eines Integral III).

Berechne das Integral von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}$$

über dem Bereich R, der im ersten Oktanten von den Kegeln $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \arctan 2$ und der Kugel $r = \sqrt{6}$ begrenzt wird. (Skizze!)

Man verwende Kugelkoordinaten und integriere zuerst bezueglich r von $r = 0$ bis $r = \sqrt{6}$, dann bezueglich θ von $\theta = \frac{\pi}{4}$ bis $\theta = arctan2$ (Raumwinkel) und schliesslich bezueglich φ von $\varphi = 0$ bis $varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann ist

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi = \frac{3\pi}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}).$$