Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 13, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 46 (Minimaler Abstand).

Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und a ein Punkt außerhalb M. Weiter sei $x_0 \in M$ ein Punkt minimalen Abstandes von a. Zeige, dass die Gerade durch a und x_0 senkrecht auf M steht, d.h., zeige, dass für alle $v \in T_{x_0}M$ $\langle v, a - x_0 \rangle = 0$ gilt.

Der Punkt x_0 ist ein Minimium der Abstandsfunktion

$$f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto ||x - a||_2^2$$

unter der Nebenbedingung M. Insbesondere ist hiermit x_0 ein kritischer Punkt von f_a unter der Nebenbedingung M (Satz XII.2.6.(b)), d.h. nach Definition gilt $df_a(x_0)|_{T_{x_0}M} = 0$, also $\langle v, \operatorname{grad} f_a(x_0)\rangle = 0$ für alle $v \in T_{x_0}M$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\operatorname{grad} f_a(x_0) = 2(a - x_0).$$

G 47 (Eine bekannte Ungleichung).

(a) Bestimme das Maximum von

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = x_1 \cdots x_n$$

unter der Nebenbedingung

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n |\, \varphi(x) = x_1 + \ldots + x_n = 1, x_i > 0\}$$

(b) Leite aus Aufgabenteil (a) die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel her, d.h., zeige für beliebige positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

(a) Zunächst einmal existiert ein Maximum der Funktion f auf der kompakten Menge $\overline{M}$. Man sieht leicht ein, dass die Funktion f auf dem Rand der Menge $\overline{M}$ verschwindet. Daher wird das Maximum in M angenommen. Der Punkt $1 \in \mathbb{R}$ ist ein regulärer Wert von φ und es gilt

$$M = \varphi^{-1}(1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n |\, x_i > 0\}.$$

Folglich handelt es sich bei der Menge M um eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und wir können somit die Methode der Langrange-Multiplikatoren verwenden um Maxima von f zu finden. Man rechnet hierbei leicht nach, dass $x_0 := (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ der einzige kritische Punkt der Funktion f unter der Nebenbedingung M ist (Satz XII.2.6.(a)). Dieser Punkt muss dann nach unserer einleitenden Bemerkung das gesuchte Maximum von f mit Maximalwert $\frac{1}{n^n}$ sein.

(b) *Für beliebige positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sei $\alpha := \sum_{i=1}^n a_i$. Dann gilt $(\frac{a_1}{\alpha}, \ldots, \frac{a_n}{\alpha}) \in M$. Nach Aufgabenteil (a) gilt somit*

$$f(\frac{a_1}{\alpha}, \ldots, \frac{a_n}{\alpha}) = \frac{a_1}{\alpha} \cdots \frac{a_n}{\alpha} = \frac{a_1 \cdots a_n}{\alpha^n} \leq \frac{1}{n^n}.$$

Umstellen dieser Ungleichung und n-tes Wurzelziehen liefert die gewünschte Formel.

G 48 (Test).

Es seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f, g : Q \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

(a) $\int_Q \big(af(x) + g(x)\big)dx = a \int_Q f(x)dx + \int_Q g(x)dx$.

(b) $\int_Q \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{\int_Q f(x)dx}$.

(c) $\int_Q |f(x)|dx = |\int_Q f(x)dx|$.

(d) Seien nun $Q := [a, b]^2$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt dann

$$\int_Q f(x)f(y)dxdy = \Big(\int_a^b f(x)\Big)^2 \ ?$$

(a) Richtig, da der Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen einen Vektorraum bildet und die Funktionen f, g als stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind.

(b) Falsch. Gegenbeispiel: $n = 1$, $Q = [1, 2]$, $f(x) = x$.

(c) Falsch. Gegenbeispiel: $n = 1$, $Q = [-1, 1]$, $f(x) = x$

(d) Richtig. Die Behauptung folgt aus Satz XIII.2.5 (Fubini) und der Beschaffenheit des Quaders.

G 49 (Integrale ausrechnen I).

Es sei $Q := [2, 5] \times [1, 4]$. Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_Q xy \, dxdy$.

(b) $\int_Q \frac{1}{x} \ln y \, dxdy$.

(c) $\int_Q a^2 y^2 e^x \, dxdy$.

Die Integranden sind alle stetig. Damit folgt aus dem Satz von Fubini:

(a) $\int_Q xy \, dxdy = \frac{315}{4}$.

(b) $\int_Q \frac{1}{x} \ln y \, dxdy = (\ln 5 - \ln 2)(4 \ln 4 - 3)$.

(c) $\int_Q a^2 y^2 e^x \, dxdy = 21a^2(e^5 - e^2)$.

Hausübung

H 52 (Integrale ausrechnen I).

Es sei $Q := [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$. Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_Q xyz \, dxdydz$.

(b) $\int_Q (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \, dxdydz$.

(c) $\int_Q z \sin(2\pi x) \, dxdydz$.

Die Integranden sind alle stetig. Damit folgt aus dem Satz von Fubini:

(a) $\int_Q xyz \, dxdydz = \frac{15}{8}$.

(b) $\int_Q (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \, dxdydz = 8$.

(c) $\int_Q z \sin(2\pi x) \, dxdydz = 0$.

H 53 (Ein Spezialfall der Hölderschen Ungleichung).

Beweise: Sei $f : [a, b] \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\Big) \geq (b-a)^2.$$

Hinweis: Setze $Q := [a, b]^2$.

(a) Zeige zunächst die Identität

$$\int_Q g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \int_a^b h(y)dy$$

für alle stetigen Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(b) Schließe hieraus für obige Funktion f

$$\int_Q \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \int_Q \frac{f(y)}{f(x)}dxdy =: I, \text{ also } I = \frac{1}{2}\int_Q \Big(\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)}\Big)dxdy.$$

(c) Wende hierauf die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel an.

(a) Die Funktion

$$F : Q \to (0, \infty), \quad F(x, y) := g(x)h(y)$$

ist stetig, da g und h als stetig vorausgesetzt wurden. Die Behauptung folgt nun aus Satz XIII.2.5 (Fubini), da stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind.

(b) Das folgt unmittelbar aus Teilaufgabe (a) und der Definition von I.

(c) Die Funktionen $a, b : Q \to (0, \infty)$ gegeben durch

$$a(x, y) := \frac{f(y)}{f(x)} \text{ und } b(x, y) := \frac{f(x)}{f(y)}$$

sind stetig und positiv. Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel folgt für alle $(x,y) \in Q$

$$(a(x,y)b(x,y))^{\frac{1}{2}} = 1 \leq \frac{a(x,y)+b(x,y)}{2}.$$

Integration über Q liefert

$$(b-a)^2 \leq I = \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\Big).$$

H 54 (Kegel).

(a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Wir definieren den Kegel über der Basis B durch

$$K(B) := \{\big((1-t)x, t\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1,\, x \in B\}.$$

Sind B und $K(B)$ Riemann-messbar, so gilt

$$\mu_{n+1}\big(K(B)\big) = \frac{1}{n+1}\mu_n(B).$$

(b) Sei $B := B_1(0)$. Bestimme mit Teilaufgabe (a) den Inhalt des Kegels $K(B)$.

(a) Es bezeichne B_t den Schnitt durch den Kegel $K(B)$ parallel zur Grundfläche in der Höhe t. Für $t \in [0,1]$ gilt $B_t = tB$. Nach Bemerkung XIII.2.8 gilt

$$\mu_n(B_t) = \mu_n(tB) = t^n\mu_n(B).$$

Satz XIII.2.9 (Cavalieri) liefert dann die Behauptung.

(b)

Es ist

$$\mu_{n+1}\big(K(B)\big) = \frac{1}{n+1}c_n.$$