# Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
# Übung 12, Lösungsskizze

## Gruppenübung

### G 42 (Zum warm werden).

Zeige: Eine Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine $n$-dimensionale $C^\infty$- Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn $M$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

---

*Sind $M$ eine $n$-dimensionale $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$, so gibt es eine offene Umgebung $U$ von $p$, eine offene Menge $V$ in $\mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ mit $\varphi(U \cap M) = V$. Also ist $U \cap M = \varphi^{-1}(V) = U$. Folglich gehört $U$ zu $M$, was zeigt, dass $M$ offen ist.*

*Es sei nun $M$ offen in $\mathbb{R}^n$. Dann setzen wir $U := M$ und $V := M$ sowie $\varphi := \mathrm{id}_M$ und erkennen $M$ als $n$-dimensionale $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

### G 43 (Kegel und Hyperboloide).

Es sei $c \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \ f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 - c.$$

Skizziere in Abhängigkeit von $c$ die Mengen

$$H_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $H_c$ eine zweidimensionale $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

---

*Es gilt $\nabla f(x, y, z) = 0$ genau dann, wenn $x = y = z = 0$ ist. Also ist $H_c$ eine zweidimensionale $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit, wenn $c \neq 0$ ist. Für $c > 0$ ist $H_c$ ein einschaliges Hyperboloid und für $c < 0$ ein zweischaliges Hyperboloid. Für $c = 0$ ist $H_c$ ein Kegel; dieser ist keine Mannigfaltigkeit, weil $\nabla f(0, 0, 0) = 0$ ist. Hier ist der Ursprung $0$ ein singulärer Punkt.*

### G 44 (Cassinische Kurven).

In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die beiden Punkte $P_1 = (-e, 0)$ und $P_2 = (e, 0)$, wobei $e > 0$ fest gewählt sei. Dann definieren wir für $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $c > 0$ die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \ f(x, y) = r_1^2(P) r_2^2(P) - c^4,$$

wobei

$$r_1(P) := \overline{P_1P} = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}, \ r_2(P) := \overline{P_2P} = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

gesetzt seien. Die Niveaumengen

$$M_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, f(x, y) = 0\}$$

nennt man *Cassinische Kurven* (nach dem Astronomen Giovanni Domenico Cassini (1628-1712)). Für welche $c > 0$ ist $M_c$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

---

*Nach dem Satz von regulären Wert ist $M_c$ für $c > 0$ mit $c \neq e$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, während $M_e$ keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist, denn der Ursprung $0 = (0,0)$ ist ein singulärer Punkt.*

*Die Kurve $M_e$ hat die Gestalt einer liegenden Acht und heißt* Bernoullische Lemniskate. *Sie wird durch die Gleichung*

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

*mit $a^2 := 2e^2$ beschrieben.*

**G 45 (Konfigurationsräume).**

Die Lage eines Systems von $n$ Punkten im $\mathbb{R}^3$ ist durch deren $3n$ Koordinaten, zwischen denen bestimmte Relationen bestehen, charakterisiert. Zum Beispiel ist die Lage eines orientierten Stabes der Länge $l$ gegben durch den Anfangspunkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ und den Endpunkt $y = (y_1, y_2, y_3)$, wobei

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 = l^2$$

gilt. Zeige: Die Menge aller solcher 6-Tupel $(x, y)$ ist eine 5-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$.

---

*Die Menge aller solcher 6-Tupel $(x, y)$ ist eine Quadrik, und somit nach Beispiel XII.2.13 eine 5-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$.*

## Hausübung

**H 48 (Die orthogonale Gruppe).**

Zeige: Die orthogonale Gruppe $O(n) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | \, X^T X = E\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$. Die Matrix $E$ steht hierbei für die Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Anleitung:

(a) Zeige: Die Menge $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | \, X = X^T\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Betrachte die Abbildung

$$f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad f(X) := X^T X.$$

Zeige, dass $f$ stetig differenzierbar ist und $O(n) = f^{-1}(E)$ gilt.

(c) Zeige, dass das Differential $df(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ in $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ durch

$$df(A)H = A^T H + H^T A, \quad H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

gegeben ist.

(d) Zeige, dass $E$ ein regulärer Wert von $f$ ist, d.h., $df(A)$ ist für jede orthogonale Matrix $A$ surjektiv. Zeige hierfür, dass die Gleichung $df(A)H = S$, $S \in \mathrm{Sym}_n \mathbb{R}$ eine Lösung besitzt.

(e) Folgere, dass $O(n) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) |\, X^T X = E\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist.

---

*(a) Es bezeichne $E_{ij}$ die Matrix, die in der $j$-ten Spalte der $i$-ten Zeile eine $1$ stehen hat und sonst nur Nullen. Man sieht dann leicht ein, dass die Matrizen $E_{ij}$, $1 \le i < j \le n$, und $E_{ii}$, $1 \le i \le n$ eine Basis von $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ bilden. Somit gilt $\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) = n + (1 + 2 + ... + n - 1) = \frac{1}{2}n(n + 1)$.*

*(b) Offenbar gilt $f(X) = E$ für $X \in O(n)$, also $O(n) \subseteq f^{-1}(E)$. Sei umgekehrt $X \in f^{-1}(E)$. Dann gilt $f(X) = X^T X = E$, also $X \in O(n)$.*

*Die Komponentenfunktionen sind Polynome in $x_{ij}$ für $1 \le i, j \le n$. Nach Satz X.2.13 ist die Abbildung $f$ somit stetig differenzierbar.*

*(c) Für $A, H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gilt $f(A + H) - f(A) = A^T H + H^T A + H^T H$. Wegen $\lim_{H\to 0} \frac{||H^T H||_{op}}{||H||_{op}} \le \lim_{H\to 0} ||H^T||_{op} = 0$ gilt $df(A)H = A^T H + H^T A$.*

*(d) Die Gleichung $df(A)H = S$ hat die Lösung $H = \frac{1}{2}AS$:*

$$df(A)H = \frac{1}{2}A^T AS + \frac{1}{2}S^T A^T A = \frac{1}{2}(S + S^T) = S.$$

*(e) Dies folgt nun aus dem Rangsatz. Es gilt $\dim(O(n)) = n^2 - \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n(n - 1)$.*

**H 49 (Der Tangentialraum der orthogonalen Gruppe $O(n)$).**

Zeige: Der Tangentialraum der orthogonalen Gruppe $O(n)$ im Einselement $E$ ist gegeben durch

$$T_E O(n) = \{H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) |\, H + H^T = 0\}.$$

---

*Nach Satz XII.2.2(b) und Hausübung H48 (d) gilt*

$$T_E O(n) = \ker(df(E)) = \{H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) |\, H + H^T = 0\}.$$

**H 50 (Tangentialraum und affiner Tangentialraum einer Quadrik).**

(a) Bestimme den Tangentialraum der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x^T Ax = 1\}$ im Punkt $a \in Q$.

(b) Der affine Tangentialraum $T_a^{\mathrm{aff}} Q$ in $a \in Q$ besteht aus den Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $(x - a) \in T_a Q$. Zeige:

$$T_a^{\mathrm{aff}} Q = \{x \in \mathbb{R}^n |\, a^T Ax = 1\}.$$

---

*(a) Wegen Satz XII.2.2(b) und $df(a) = 2a^T A$ gilt*

$$T_a Q = \{v \in \mathbb{R}^n |\, a^T A v = 0\}.$$

*(b) Wegen $a^T A a = 1$ und $a^T A(x - a) = 0$ ergibt sich die in der analytischen Geometrie gebräuchliche Formel*

$$T_a^{\text{aff}} Q = \{x \in \mathbb{R}^n |\, a^T A x = 1\}.$$

**H 51 (Extrema unter Nebenbedingungen).**

Suche dasjenige Dreieck mit den Seiten $x, y, z$, welches bei gegebenem Umfang $2s$ den größten Flächeninhalt besitzt.

Hinweis: Das Quadrat des Flächeninhalts ist nach der *Heronschen Formel* gegeben durch den Ausdruck $f(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z)$.

---

*Es gilt die Funktion $f$ auf der Menge*

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x, y, z \geq 0, x + y \geq z, x + z \geq y, y + z \geq x\}$$

*unter der Nebenbedingung $x+y+z-2s = 0$ zu maximieren. Auf dem Rand dieses abgeschlossenen Bereichs gilt $f(x, y, z) = 0$, also liegt das Maximum im Inneren. Außerdem ist $0$ ein regulärer Wert der Funktion*

$$g : A^\circ \to \mathbb{R}, |,\ g(x, y, z) = x + y + z - 2s.$$

*Wir können also die Methode der Lagrange-Multiplikatoren anwenden. Dazu bilden wir die Funktion*

$$F : A^\circ \to \mathbb{R},\ \ F(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z) + \lambda(x + y + z - 2s),$$

*und erhalten durch differenzieren die drei Gleichungen*

$$-s(s - y)(s - z) + \lambda = 0,\ \ -s(s - x)(s - z) + \lambda = 0,\ \ -s(s - x)(s - y) + \lambda = 0.$$

*Als Lösung ergibt sich, wenn man überall nach $\lambda$ auflöst und die drei erhaltenen Ausdrücke gleichsetzt, $x = y = z = \frac{2s}{3}$, d.h. das gleichseitige Dreieck.*