Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 11, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 38 (Zur Erinnerung).

Skizziere und diskutiere innerhalb einer kleinen Gruppe den Beweis des „Satzes über die Umkehrfunktion".

Was besagt der Satz? Was sind die entscheidenen Hilfsmittel und Beweisideen?

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung. Der Satz über die Umkehrfunktion besagt nun, dass f genau dann um u lokal invertierbar ist, wenn das Differential $df(u)$ invertierbar ist. In diesem Fall ist die lokale Umkehrfunktion ebenfalls eine C^k-Abbildung.

Die eine Richtung ist trivial. Die andere Richtung wird in mehreren Schritten bewiesen:

Zunächst wird die Situation auf eine einfachere reduziert. Hierdurch wird der Beweis weitaus übersichtlicher. Der nächste Schritt besteht darin, die Funktion in einer kleinen Umgebung von u (oder eben der 0) aufzulösen. Hierzu benötigt man den Satz vom endlichen Zuwachs und den Banachschen Fixpunktsatz! Dann sucht man, wie in der Definition der lokalen Invertierbarkeit verlangt, zwei offene Mengen U_1 und V_1, so dass $f_{|U_1} : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Aus der Konstruktion der offene Mengen U_1 und V_1 und einer Ungleichung (Satz vom endlichen Zuwachs), sieht man schnell ein, dass die Umkehrabbildung $\varphi := (f_{|U_1})^{-1}$ stetig ist. Anschließend muss noch die Stetigkeit der Ableitung nachgewiesen werden. Mit Hilfe der Differenzierbarkeit der Funktion f und der Voraussetzung, dass $df(u)$ invertierbar ist, wird zuallererst die Differenzierbarkeit von φ gezeigt. Hierbei spielt auch die Neumannsche Reihe eine entscheidende Rolle. Danach zeigt man mit Hilfe von Lemma XI.2.2(a), dass φ stetig differenzierbar ist. Die letzte Behauptung folgt dann aus Lemma XI.2.2(c).

G 39 (Das Newton-Verfahren).

Im Eindimensionalen besteht das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f darin, auf die zur Gleichung $f(x) = 0$ äquivalente Fixpunktgleichung

$$x = x - (f'(x))^{-1} f(x), \quad f' \neq 0$$

den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Man spricht vom vereinfachten Newton-Verfahren, wenn man f' nicht bei jedem Schritt neu ausrechnet, sondern durch eine Konstante $A \approx f'(x)$ ersetzt,

$$x = x - A^{-1} f(x).$$

In beiden Formen überträgt sich das Newton-Verfahren auf den $\mathbb{R}^n$. Dabei ist $x \in \mathbb{R}^n$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $A \approx J_x(f)$ eine $n \times n$-Matrix. Die Bedingung $f' \neq 0$ vom Fall $n = 1$ geht über in die Forderung, dass die Jacobimatrix $J_x(f)$ bzw. die konstante Matrix A invertierbar ist.

Beweise den folgenden Satz: Die Matrix A sei invertierbar. Genügt die Funktion $F(x) := x - A^{-1}f(x)$ in der offenen Kugel $B_r(a)$ einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten $\alpha = \frac{1}{2}$ und ist $||A^{-1}f(a)||_2 < \frac{1}{2}r$, so hat die Funktion f in $B_r(a)$ genau eine Nullstelle x_0. Das Newton-Verfahren

$$x_{k+1} := x_k + A^{-1}f(x_k), \quad k = 1, 2, 3, ... \text{ mit beliebigem } x_1 \in B_r(a)$$

ist durchführbar (d.h. es führt nicht aus $B_r(a)$ hinaus), und es gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Zum Beweis wendet man den Banachschen Fixpunktsatz auf F und die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_s(a)$ an, wobei $s < r$ so gewählt ist, dass $||x_1 - a||_2 \leq s$ und $||a - F(a)||_2 = ||A^{-1}f(a)||_2 \leq \frac{1}{2}s$ gilt. Es gilt dann $||F(x) - a||_2 \leq ||F(x) - F(a)||_2 + ||F(a) - a||_2 \leq s$, d.h. $F(\overline{B}_s(a)) \subseteq \overline{B}_s(a)$. Man kann s beliebig nahe an r wählen.

G 40 (Lokale Diffeomorphismen).

Zeige, dass die durch

$$f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \quad f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

Es gilt etwa $f(1, 1) = (0, 2) = f(-1, -1)$. Daher ist die Abbildung f nicht injektiv. Allerdings gilt

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

und somit $\det(J_{(x,y)}(f)) = 4x^2 + 4y^2 \neg 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Mit Bemerkung XI.1.2.(a) folgt, dass $J_{(x,y)}(f)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ invertierbar ist. Der Satz über die Umkehrfunktion liefert nun die Behauptung.

G 41 (Globale Diffeomorphismen I).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige: Ist $df(x)$ für alle $x \in U$ positiv definit, so ist f ein globaler Diffeomorphismus auf $f(U)$.

Wir wollen Folgerung XI.2.8 verwenden. Zunächst zeigen wir, dass $df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $df(x)$ für alle $x \in U$ injektiv ist. Dies folgt aber direkt aus der Voraussetzung, da positiv definite Matrizen injektiv sind (Beweis?). Nun zeigen wir, dass f injektiv ist. Seien dazu $x, y \in U$ mit $x \neq y$. Aus Konvexität und dem Mittelwertsatz folgt, dass

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 df(tx + (1-t)y)(x-y)dt.$$

Hieraus folgt dann

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle = \int_0^1 \langle df(tx + (1-t)y)(x-y), x-y\rangle dt > 0$$

und somit $f(x) \neq f(y)$. Also ist f injektiv.

Hausübung

H 44 (Ein interessanter Diffeomorphismus).

Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeige, dass die Abbildung der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$

$$f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n, \ \ f(x) := \frac{x}{\sqrt{1 - \langle x, x\rangle}}$$

ein Diffeomorphismus ist, und berechne ihr Differential.

Man verifiziert leicht, dass durch

$$g : \mathbb{R}^n \to B_1(0), \ \ g(x) := \frac{x}{\sqrt{1 + \langle x, x\rangle}}$$

eine C^1-Umkehrfunktion gegeben wird. Somit ist f ein Diffeomorphismus.

Es sei

$$c : B_1(0) \to \mathbb{R}, \ \ c(x) := \frac{1}{\sqrt{1 - \langle x, x\rangle}}$$

Dann gilt $f = c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ Für $x \in B_1(0)$ und $h \in \mathbb{R}^n$ ist das Differential gegeben durch

$$df(x)h = \nabla c(x)h \cdot x + c(x)h.$$

H 45 (Globale Diffeomorphismen II).

Es sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$||f(x) - f(y)||_2 \geq \lambda ||x - y||_2 \text{ für alle } x, y \in U$$

und eine geeigneten Konstante $\lambda > 0$. Zeige, dass U diffeomorph auf $f(U)$ abgebildet wird.

Wir wollen wieder Folgerung XI.2.8 verwenden. Hierfür zeigen wir zunächst, dass f injektiv ist. Seien dazu $x, y \in U$ mit $x \neq y$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung $||f(x) - f(y)||_2 \geq \lambda ||x - y||_2$, also $f(x) \neq f(y)$. Somit ist f injektiv. Als nächstes zeigen wir, dass $df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $df(x)$ für alle $x \in U$ injektiv ist. Angenommen $df(x)$ ist nicht injektiv. Dann gibt es $h \in \mathbb{R}^n$ mit $df(x)h = 0$. Wähle $\alpha > 0$ mit $x + \alpha h \in U$. Setze $h' = \alpha h$. Aus der Differenzierbarkeit von f folgt dann $f(x + h') - f(x) = df(x).h' + r(h') = r(h')$ mit einer in 0 stetigen Funktion $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{||h||_2} = 0$ erfüllt. Sei zusätzlich $\alpha > 0$ so, dass $||r(h')|| \leq \frac{\lambda}{2} ||h'||_2$ gilt. Nun gilt $||f(x + h') - f(x)||_2 = ||r(h')||_2 \geq \lambda ||h'||_2$. Hieraus folgt

$$\lambda \leq \frac{||r(h')||_2}{||h'||_2} \leq \frac{\lambda}{2},$$

also ein Widerspruch. Somit ist $df(x)$ für alle $x \in U$ injektiv und folglich auch invertierbar.

H 46 (Auflösen von Gleichungssystemen).

Für die Funktionen gegeben durch

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \ f_1(x, y_1, y_2) := x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \ f_2(x, y_1, y_2) := xy_1 + y_1 y_2 + y_2 x + 2$$

betrachte das Gleichungssystem

$$f_1(x, y_1, y_2) = 0$$

$$f_2(x, y_1, y_2) = 0$$

und die Nullstelle $(2, -1, 0)$. Untersuche das Gleichungssystem in der Nähe dieser Nullstelle hinsichtlich der Auflösbarkeit nach y_1, y_2. Berechne im Falle der Auflösbarkeit die Ableitung der nach der Variablen x aufgelösten Funktionen im Punkt $a = 2$.

Wir berechnen zunächst die Jacobimatrix nach diesen Variablen:

$$J_Y(f)(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & x + y_1 \end{pmatrix} \Bigg|_{(2,-1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist invertierbar. Es gibt also in einem hinreichend kleinen Intervall I um $a = 2$ zwei C^1-Funktionen $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ mit $(g_1(2), g_2(2)) = (-1, 0)$ und $f_i(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$, $i = 1, 2$. Deren Ableitungen im Punkt $a = 2$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} g_1'(2) \\ g_2'(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,-1,0)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

H 47 (Wurzeln matrixwertiger Funktionen).

Es sei U eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m$ und $A : U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine C^1-Abbildung mit $A(0) = E$, wobei $E := E_n$ die Einheitsmatrix von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezeichnet. Zeige: Es gibt in einer geeigneten Umgebung $U_1 \subseteq U$ von 0 eine C^1-Abbildung $B : U_1 \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $B(0) = E$ und $B^2(x) = A(x)$.

Zum Beweis betrachte die Funktion

$$f : U \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to U \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(x, y) := A(x) - y^2.$$

Diese erfüllt in $(0, E)$ die Voraussetzung des Satzes über die implizite Funktion: $f(0, E) = 0$; ferner gilt $d_Y f(0, E)H = 2H$ für $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $d_Y f(0, E)$ invertierbar. Somit gibt es in einer hinreichend kleinen Umgebung $U_1 \subseteq U$ von 0 eine C^1-Abbildung $B : U_1 \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $B(0) = E$ und $f(x, B(x)) = 0$.