Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 10, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 34 (Zum warm werden).

Betrachte die Menge $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

(a) Mache dir klar, dass U nicht sternförmig ist.

(b) Finde alle möglichst kleinen Mengen $C \subseteq U$, so dass $U \backslash C$ sternförmig ist.

(a) *Ist $p \in U$ beliebig, so sind die Punkte auf dem Halbstrahl durch* 0 *und* $-p$ *von* p *aus unerreichbar.*

(b) *Sei o.B.d.A.* $p = (1, 0)$. *Nehmen wir den ganzen Strahl* $]-\infty, 0] \times \{0\}$ *heraus, so ist das Restgebiet* $\mathbb{R}^2 \backslash]-\infty, 0] \times \{0\}$ *sternförmig bezüglich* $(1, 0)$.

G 35 (Zentralfelder).

Es sei $X = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, und für die Komponenten der Pfaffschen Form

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j dx_j$$

gelte die Darstellung

$$f_j(x) := x_j \varphi(||x||_2), \ \ 1 \leq j \leq n,$$

mit einer Funktion $\varphi \in C^q(0, \infty)$, $q \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeige: Die Pfaffsche Form α ist exakt.
Hinweis: Eine Stammfunktion f wird durch $f(x) := \Phi(||x||_2)$ gegeben mit

$$\Phi(r) := \int_{r_0}^{r} t\varphi(t)dt, \ \ r > 0,$$

wobei r_0 eine feste positive Zahl ist.

(b) Zeige: Das Zentralfeld

$$\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n, \ \ x \mapsto \frac{cx}{||x||_2^n}$$

mit $c \in \mathbb{R}^\times$ und $n \geq 2$ ist ein Gradientenfeld. Bestimme das zugehörige Potential.
Bemerkung: Das Zentralfeld spielt eine wichtige Rolle in der Physik, wo es je nach Kontext *Newtonsches* oder *Coulombsches Potential* heißt.

(a) *Es ist klar, dass* Φ *zu* $C^{q+1}(0, \infty)$ *gehört und* $\Phi'(r) = r\varphi(r)$ *gilt. Also folgt aus der Kettenregel*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \Phi'(||x||_2) \frac{x_j}{||x||_2} = x_j \varphi(||x||_2) = a_j(x), \ \ j = 1, \ldots, n, x \in X.$$

(b) *Ein Potential U wird durch*

$$U(x) := \begin{cases} c\ln(||x||_2), & \text{falls } n = 2, \\ \frac{c}{2-n}||x||_2^{2-n}, & \text{falls } n > 2. \end{cases}$$

für $x \neq 0$ gegeben.

G 36 (Rotation eines Vektorfelds im $\mathbb{R}^3$).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Unter der Rotation der Feldes $F = (F_1, F_2, F_3)$ versteht man das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \text{ symbolisch } \nabla \times F.$$

(a) Es sei $\omega_F := F_1dx + F_2dy + F_3dz$ die zu dem Vektorfeld assoziierte Pfaffsche Form. Zeige: Ist ω_F exakt, besitzt also eine Stammfunktion, so gilt $\operatorname{rot} F = 0$.

(b) Zeige: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{rot} F = 0$, so besitzt ω_F eine Stammfunktion.

Hinweis: Satz X.6.19.

(c) Betrachte das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \mapsto (y^2z^3 \cos x - 4x^3z, 2yz^3 \sin x, 3y^2z^2 \sin x - x^4).$$

Zeige, dass ω_F exakt ist.

(a) *Sei f eine Stammfunktion zu ω_F. Dann gilt $f \in C^2(U)$ und $\nabla f = F$. Aus dem Satz von Schwartz folgt dann $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.*

(b) *Es gilt ω_F geschlossen genau dann, wenn $\operatorname{rot} F = 0$. Die Behauptung folgt dann aus Satz X.6.19.*

(c) *Man rechnet leicht nach, dass $\operatorname{rot} F = 0$. Die Behauptung folgt dann aus der Sternfömigkeit von $\mathbb{R}^3$.*

G 37 (Zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend).

Zeige, dass die Menge

$$M := \{(x, f(x)) | \, x \in]0, 1]\} \cup \{(0, y) | \, y \geq 0\}$$

für

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, \ \begin{cases} -2n^2(n+1)x + 2n(n+1), & \text{falls } \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n^2(n+1)x - 2n^2, & \text{falls } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}. \end{cases}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Die Funktion f osszilliert sehr stark in der Nähe der Null!

Angenommen M ist nicht zusammenhängend, d.h. $M = U \cup V$ für M-offene, disjunkte Teilmengen U und V von M. Da die Mengen $\cup\{(0,y)|\, y \geq 0\}$ und $\{(x, f(x))|\, x \in]0,1]\}$ zusammenhängend sind, müssen beide komplett in einer der beiden Mengen U bzw. V liegen. Liegen sie in der selben Menge, so muss die andere leer sein. Sei nun (o.B.d.A.) $\cup\{(0,y)|\, y \geq 0\} \subseteq U$ und $\{(x, f(x))|\, x \in]0,1]\} \subseteq V$. Wir zeigen, dass in diesem Fall $U \cap V \neq \emptyset$ gilt: Für jeder in M-offene Menge O gilt nämlich $O \cap \{(x, f(x))|\, x \in]0,1]\} \neq \emptyset$. Folglich gilt dies auch für $O = U$, also $U \cap \{(x, f(x))|\, x \in]0,1]\} \neq \emptyset$. Somit ergibt sich $U \cap V \neq \emptyset$. Wir haben also gezeigt, dass M zusammenhängend ist.

Angenommen M ist zusammenhängend. Dann existiert ein (stetiger) Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = p \in \{(x, f(x))|\, x \in]0,1]\}$. Da γ stetig ist und $\gamma(0) = 0$ gilt, muss γ in einer gewissen 0-Umgebung von $[0,1]$ in einer beliebig kleinen 0-Umgebung von $\mathbb{R}^2$ verbleiben. Dies ist aber unmöglich, da die Funktion f in der Nähe der Null sehr stark osszilliert! Wir haben also gezeigt, dass M nicht wegzusammenhängend ist.

Hausübung

H 37 (Orthonormalbasen).

Es sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Zeige, dass $||v||_2^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$ gilt.

Es gilt $||v||_2^2 = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle b_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle b_j, b_i \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$, da $\langle b_j, b_i \rangle = 0$ für $i \neq j$ nach Voraussetzung.

H 38 (Zusammenhang).

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ zusammenhängend?

Bemerkung: Hier ist $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Für $k = n-1$ ist $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ nicht zusammenhängend. Jede zwei Punkte, einer mit positiver n-ter Koordinate und einer mit negativer n-ter Koordinate, lassen sich nicht durch einen Weg in $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ verbinden. Jeder Weg schneidet nach dem Zwischenwertsatz die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$).

Für $k \leq n-1$ ist die Menge $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ zusammenhängend. Je zwei Punkte in $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ lassen sich dann durch einen Streckenzug verbinden (Warum?). Also ist $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ als wegzusammenhängender Raum insbesondere auch zusammenhängend.

H 39 (Vereinigung von zusammenhängenden Mengen).

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ zwei zusammenhängende Mengen Teilmengen mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeige, dass dann auch $A \cup B$ zusammenhängend ist.

Bemerkung: Die gleiche Behauptung gilt auch für eine beliebige Vereinigung zusammenhängender Teilmengen eines metrischen Raumes, solange je zwei solcher Teilmengen nicht disjunkt sind.

Angenommen $A \cup B = U \cup V$ für $A \cup B$-offene, disjunkte Teilmengen U und V von $A \cup B$. Dann muss eine der beiden Mengen leer sein: Da sowohl A als auch B zusammenhängend sind, müssen beide Menge ganz in U oder V liegen. Wegen $A \cap B \neq \emptyset$, müssen A und B beide in der selben Menge liegen. O.B.d.A. sei $A, B \subseteq U$. Dann gilt auch $A \cup B \subseteq U$ und folglich $V = \emptyset$.

H 40 (Der Abschluss zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend).

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Zeige, dass dann auch $\overline{A}$ zusammenhängend ist.

Angenommen $\overline{A} = U \cup V$ mit $\overline{A}$-offenen, disjunkten Mengen U und V. Dann muss A in einer der beiden Mengen U oder V liegen, da ansonsten $A \cap U$ und $A \cap V$ A-offene, disjunkte Mengen wären mit $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es gelte o.B.d.A. $A \subseteq U$.

Wir zeigen nun, dass $V = \emptyset$ gilt. Angenommen nicht, dann existiert $x \in V$. Wegen $A \subseteq U$, gilt $x \in \partial A$. Daher gilt $O \cap A \neq \emptyset$ für jede offene x-Umgebung O. Folglich gilt auch $V \cap A \neq \emptyset$ und somit $V \cap U \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Annahme $V \cap U = \emptyset$. Also ist $V = \emptyset$.

Alternativ kann auch $U = \overline{A}$ gezeigt werden.

H 41 (Zusammenhangskomponenten).

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Auf X definieren wir folgendermaßen eine Relation (vgl. Analysis I): Zwei Punkte $x, y \in X$ stehen zueinander in Relation, wenn sie in einer zusammenhängenden Menge liegen, oder formaler

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists U \subseteq X \text{ zusammenhängend} : x, y \in U.$$

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung: Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation nennt man *Zusammenhangskomponenten.*

(b) Zeige:

(i) Die Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängend und abgeschlossen.

(ii) Jede zusammenhängende Menge ist in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

(iii) Zusammenhangskomponenten sind entweder gleich oder disjunkt und Überdecken X.

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Zusammenhangskomponenten von U auch offen sind.

(d) Zeige, dass jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine disjunkte Vereinigung von Gebieten ist.

(a) $\sim$ ist reflexiv, d.h. $x \sim x$: Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $B_\epsilon(x)$ eine zusammenhängende Menge, die x enthält.

$\sim$ ist symmetrisch, d.h. gilt $x \sim y$, dann auch $y \sim x$: Das folgt unmittelbar aus der Definition der Relation!

$\sim$ ist transitiv, d.h. gilt $x \sim y$ und $y \sim z$, dann auch $x \sim z$: Liegen x und y in einer zusammenhängenden Menge U und y und z in der zusammenhängenden Menge V, dann ist $U \cup V$ eine zusammenhängende Menge (vgl. H39!), die sowohl x als auch z enthält.

(b) Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, dass Zusammenhangskomponenten Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation sind. Nach Definition ist die Zusammenhangskomponente, welche den Punkt $x \in X$ enthält, die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, die x enthalten. Diese ist nach der Bemerkung in H39 zusammenhängend. Dies impliziert insbesondere, dass jede zusammenhängende Teilmenge in einer Komponente enthalten ist. Das eine Zusammenhangskomponente abgeschlossen ist folgt aus H40.

(c) Sei $K(x)$ die Zusammenhangskomponente des Punktes $x \in U$. Wir müssen zeigen, dass jeder Punkt $y \in K(x)$ eine Umgebung enthält, die noch ganz in $K(x)$ enthalten ist. Für $\epsilon > 0$ ist $B_\epsilon(y)$ eine zusammenhängende Menge. Dann ist nach H39 auch $B_\epsilon(y) \cup K(x)$ zusammenhängend. Da nun $B_\epsilon(y) \subseteq K(y)$ nach (b) und $K(y) = K(x)$, folgt $B_\epsilon(y) \subseteq K(x)$.

(d) Dies folgt unmittelbar aus den vorangehenden Teilaufgaben: Jede offene Menge ist die disjunkte Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten. Die Zusammenhangskomponenten sind offen in U und folglich offen in $\mathbb{R}^n$. Außerdem sind sie zusammenhängend. Also ist jede Zusammenhangskomponente einer offenen Teilmenge der $\mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

H 42 (Zur Interpretation der Rotation eines Vektorfeldes im $\mathbb{R}^2$).

Es sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^2$ und ω_F seine assoziierte Pfaffsche Form. Außerdem sei die Kurve

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \ \gamma_r(t) := (r\cos t, r\sin t)$$

gegeben. Man zeige:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \omega_F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0).$$

Weshalb bezeichnet man $\operatorname{rot} F(0)$ als die Rotation von F an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^2$?

Es gilt

$$\int_{\gamma_r} \omega_F = \sum_{i=1}^{2} \int_0^{2\pi} F_i(\gamma_r(t)) \cdot (\gamma_r)_i'(t)dt = \int_0^{2\pi} r(F_2(\gamma_r(t)) \cdot \cos t - F_1(\gamma_r(t)) \cdot \sin t)dt$$

Wir betrachten nun den ersten Summanden. Die Rechnung für den zweiten Summanden verläuft analog.

Es sei

$$g : [0, 2\pi]\times] - \epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}, \ \ (t, r) \mapsto F_2(\gamma_r(t)) \cdot \cos t$$

Hierbei ist $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $\gamma_r(t) \subseteq U$ für $|r|, |t| < \epsilon$. Setzte dann

$$G :] - \epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}, \ \ r \mapsto \int_0^{2\pi} g(t, r)dt.$$

Nach Satz X.5.1 gilt dann

$$\frac{\partial G}{\partial r}(s) = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} g(t, s)dt = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(t, s)dt.$$

Nun gilt

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} r(F_2(\gamma_r(t)) \cdot \cos t dt = \frac{1}{\pi} \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} G(r) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial G}{\partial r}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(t, 0)dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0, 0, 0) \cdot (\cos t)^2 - \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0, 0, 0) \cdot (\cos t \sin t))dt = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0).$$

Wie bereits angedeutet liefert der zweite Summand

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} r(F_1(\gamma_r(t)) \cdot \sin t dt = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0).$$

Somit folgt wie gewünscht

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \omega_F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) = \langle \operatorname{rot} F(0), e_3 \rangle, \ \ e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

γ_r ist ein geschlossener Weg mit Zentrum 0. Wir summieren die Vektorfeldkomponenten in Richtung γ_r längs γ_r auf, dividieren anschließend durch die Fläche und lassen dann den Weg immer enger um 0 laufen. Wir berechnen also sozusagen eine Rotationsdichte im Punkt 0.

H 43 (Integrierender Faktor).

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ω eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form auf U. Eine Funktion $h \in C^1(U)$ heißt *Eulerscher Faktor* oder *integrierender Faktor* für ω, falls $h \cdot \omega$ geschlossen ist und $h(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \in U$ gilt.

(a) Zeige: Ist $h \in C^1(u)$ mit $h(x,y) \neq 0$ für $(x,y) \in U$, so ist h genau dann ein Eulerscher Multiplikator für $\omega = f dx + g dy$, wenn gilt

$$f\frac{\partial h}{\partial y} - g\frac{\partial h}{\partial x} + (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x})h = 0.$$

(b) Es seien $a, b, c, e > 0$ und $\omega = (c - ex)y dx + (a - by)x dy$.

Zeige, dass ω einen integrierenden Faktor der Form $h(x,y) = m(xy)$ auf $U =]0,\infty[\times]0,\infty[$ besitzt.

Hinweis: Man verwende Aufgabenteil (a), um eine Differentialgleichung für m herzuleiten, für die man eine Lösung erraten kann.

(a) Die Funktion h ist genau dann ein Eulerscher Multiplikator für $\omega = f dx + g dy$, wenn $h \cdot \omega$ geschlossen ist, also genau dann wenn

$$\frac{\partial(hf)}{\partial y} = \frac{\partial(hg)}{\partial x}.$$

Dies ist aber gerade äquivalent zu

$$f\frac{\partial h}{\partial y} - g\frac{\partial h}{\partial x} + (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x})h = 0.$$

(b) Nach Aufgabenteil (a) gilt die Gleichung

$$(c - ex)y\frac{\partial h}{\partial y} - (a - by)x\frac{\partial h}{\partial x} + (c - a - ex + by)h = 0.$$

Für $h(x,y) = m(xy)$ gilt weiter

$$(c - a - ex + by)xy\frac{\partial m}{\partial z} + (c - a - ex + by)m = 0,$$

also für $z = xy$

$$(c - a - ex + by)(z\frac{\partial m}{\partial z} + m) = 0.$$

Nun ist $m(z) := \frac{1}{z}$ eine Lösung der Differentialgleichung $z\frac{\partial m}{\partial z} + m = 0$. Folglich ist $h(x,y) := \frac{1}{xy}$ ein integrierender Faktor für ω auf $U =]0,\infty[\times]0,\infty[$.

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!