Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 9, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 30 (Kurvenintegrale und Stammfunktionen).

(a) Im $\mathbb{R}^3$ betrachte die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (e^{t\sin t}, t^2 - 2\pi t, \cos\frac{t}{2})$. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega_i$, $i = 1, 2$ für die Pfaffschen Formen

$$\omega_1 = xdx + ydy + zdz \text{ und } \omega_2 = zdy.$$

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetige Pfaffsche Form. Eine Funktion $F \in C^1(U)$ heißt Stammfunktion von ω, falls $dF = \omega$ gilt. Ist $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ stetig differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion.

Bestimme eine Stammfunktion der Pfaffschen Form

$$\omega = (2xy + z^3)dx + x^2 dy + 3xz^2 dz.$$

(a)

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_0^{2\pi} ((\sin t + t\cos t)e^{2t\sin t} + 2(t^2 - 2\pi t)(t - \pi) - \frac{1}{4}\sin t)dt$$

$$= [\frac{1}{2}e^{2t\sin t}]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}(t^3 - 3\pi t^2 + 2\pi^2 t)dt = 0 + 8\pi^4 - 16\pi^4 + 8\pi^4 = 0.$$

und

$$\int_\gamma \omega_2 = 2\int_0^{2\pi}(t - \pi)\cos\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi} t\cos\frac{t}{2}dt - 2\pi\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt$$

$$= 4[t\sin\frac{t}{2}]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8[\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = -16.$$

(b) Die Pfaffsche Form ω erfüllt die notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion. Integration der Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + z^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 3xz^2$ ergibt:

$$F(x, y, z) = x^2 y + xz^3 + f(y, z), \quad (1)$$
$$F(x, y, z) = x^2 y + g(x, z) \quad (2)$$
$$F(x, y, z) = xz^3 + h(x, y). \quad (3)$$

Diese Gleichungen stimmen überein, falls $f(y, z) = 0$, $g(x, z) = xz^3$ und $h(x, y) = x^2 y$. Dann gilt $F(x, y, z) = x^2 y + xz^3$ und dazu kann noch eine Konstante addiert werden.

G 31 (Zusammenhang).

Überprüfe, ob folgende Mengen zusammenhängend sind:

(a) $X = [0,1] \cup (2,3)$.

(b) Die Hyperbel $H := \{x \in \mathbb{R}^2 |\, x_1^2 - x_2^2 = 1\}$.

(c) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.
Hinweis: Überlege dir zunächst, dass die Abbildung $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(a) Die Menge $X = [0,1]\cup(2,3)$ ist nicht zusammenhängend, denn durch $U = [0,1]$ und $V = (2,3)$ ist eine Zerlegung in nichtleere disjunkte X-offene Teilmegen gegeben.

Aus Klaus Jänichs Topologiebuch: „U ist doch ein abgeschlossenes Intervall!? - Es mag wohl in der Seele weh tun, ein abgeschlossenes Intervall offen nennen zu müssen; aber ihr Leute! es handelt sich doch hierbei um die Topologie von X und nicht um die von $\mathbb{R}$“.

(b) Die Hyperbel H hängt nicht zusammen. Ihre beiden Äste $H_+ := H \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\, x_1 > 0\}$ und $H_- := H \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\, x_1 < 0\}$ bilden eine Zerlegung in nichtleere disjunkte H-offene Teilmengen.

(c) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend. Andernfalls wäre das Bild unter der stetigen Abbilung $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zusammenhängend; tatsächlich aber ist dieses Bild $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

G 32 (Zwischenwertsatz).

Beweise folgende Behauptung:

Es sei X ein zusammenhängender Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner seien a und b Punkte in X. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Zwischenwertsatz: Die Menge $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend als Bild der zusammenhängenden Menge X unter der stetigen Funktion f. Nach Satz X.6.7 ist $f(X)$ ein Intervall. Die Behauptung folgt nun aus $[f(a), f(b)] \subseteq f(X)$.

G 33 (Wegzusammenhang).

Zeige: Für $n \geq 2$ sind $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ und die Sphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n |\, ||x||_2 = 1\}$ wegzusammenhängend.

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Wegen* $n \geq 2$ *gibt es einen weiteren Punkt* $c \in \mathbb{R}^n$ *derart, dass* 0 *weder auf der Strecke* $\overline{ac}$ *noch auf der Strecke* $\overline{cb}$ *liegt. Der Streckenzug* $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$$\gamma(t) := \begin{cases} a + t(c - a), & \text{für } t \in [0, 1], \\ c + (t - 1)(b - c), & \text{für } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

verbindet dann a *und* b. *Liegen* a *und* b *auf* S^{n-1}, *so ist* $\frac{\gamma}{||\gamma||_2}$ *eine Kurve auf* S^{n-1}, *die* a *und* b *verbindet.*

Hausübung

H 33 (Kurvenintegrale).

(a) Im $\mathbb{R}^2$ betrachte die Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := e^t(\cos t, \sin t)$. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ für die Pfaffsche Form $\omega := xdy - ydx$.

(b) Seien $r, c > 0$ und γ die Schraubenlinie

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) := (r\cos t, r\sin t, ct).$$

Berechne das Kurvenintegrale $\int_\gamma \omega$ für die Pfaffsche Form

$$\omega = (x^2 - y^2)dx + 3zdy + 4xydz.$$

(a) Es gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t)dt = \int_a^b e^{2t}dt = \frac{1}{2}(e^{2b} - e^{2a}).$$

(b) Es gilt

$$\int_\gamma ((x^2-y^2)dx+3zdy+4xydz) = \int_0^{2\pi} (r^3(\sin^3 t-\cos^2 t\sin t)+3rct\cos t+4cr^2\cos t\sin t)dt$$

$$= 2r^3\int_0^{2\pi} \sin^3 tdt - r^3\int_0^{2\pi} \sin tdt + 3rc\int_0^{2\pi} \cos tdt + 4cr^2\int_0^{2\pi} \sin 2tdt$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

H 34 (Stammfunktionen).

Bestimme Stammfunktionen der folgenden Pfaffschen Formen:

(a) $\omega = (2x - y)dx - xdy \in \Omega(\mathbb{R}^2)$.

(b) $\omega = (x^2y^3 + 2xy)dx + (2x^3y^2 + x^2)dy \in \Omega(\mathbb{R}^2)$.

(c) $\omega = (y^2z^3\cos x - 4x^3z)dx + 2yz^3\sin xdy + (3y^2z^2\sin x - x^4)dz \in \Omega(\mathbb{R}^3)$.

(a) Die Pfaffsche Form ω erfüllt die notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion. Integration der Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -x$ ergibt:

$$F(x, y) = x^2 - xy + f(y), \tag{4}$$
$$F(x, y) = -xy + g(x). \tag{5}$$

Diese Gleichungen stimmen überein, falls $f(y) = 0$, $g(x) = x^2$. Dann gilt $F(x, y) = x^2 - xy$ und dazu kann noch eine Konstante addiert werden.

(b) *Die Pfaffsche Form ω erfüllt nicht die notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion: Es gilt $\frac{\partial(x^2y^3+2xy)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x \neq 6x^2y^2 + 2x = \frac{\partial(2x^3y^2+x^2)}{\partial x}$. Somit besitzt ω keine Stammfunktion!*

(c) *Die Pfaffsche Form ω erfüllt die notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion. Integration der Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2z^3\cos x - 4x^3z$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^3\sin x$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 3y^2z^2\sin x - x^4$ ergibt:*

$$F(x,y,z) = y^2z^3\sin x - x^4z + f(y,z), \tag{6}$$
$$F(x,y,z) = y^2z^3\sin x + g(x,z) \tag{7}$$
$$F(x,y,z) = y^2z^3\sin x - x^4z + h(x,y). \tag{8}$$

Diese Gleichungen stimmen überein, falls $f(y,z) = 0$, $g(x,z) = x^4z$ und $h(x,y) = 0$. Dann gilt $F(x,y,z) = y^2z^3\sin x - x^4z$ und dazu kann noch eine Konstante addiert werden.

H 35 (Zusammenhang als topologische Invariante).

Der Zusammenhang stellt eine wichtige topologische Invariante dar. Zeige:

(a) Sind X und Y homöomorphe Räume, d.h. existiert eine stetige, bijektive Abbildung $f : X \to Y$ mit stetiger Umkehrfunktion, so ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

(b) $\mathbb{R}^n$ ist für $n > 1$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

(a) *Dies folgt direkt aus Satz X.6.8 und $f(X) = Y$, sowie $f^{-1}(Y) = X$.*

(b) *Für $n > 1$ ist $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ nach Gruppenübung G33 zusammenhängend, die Menge $\mathbb{R}\backslash\{y\}$ jedoch für einen Punkt $y \in \mathbb{R}$, da sie kein Intervall ist. Gäbe es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so induzierte dieser aber einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{f(0)\}$.*

H 36 (Eine Anwendung).

Zeige: Zu jeder stetigen Funktion $f : S^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, gibt es ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beispiel: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, in denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

Für $n \geq 1$ ist S^n nach Gruppenübung G33 zusammenhängend. Angenommen es gilt $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^n$. Dann ist die Funktion

$$Fs : S^n \to \mathbb{R},\ F(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

wohldefiniert und stetig. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt F jeden Wert in $[-1,1]$ an. Die Beobachtung $|F(x)| = 1$ für alle $x \in S^n$ liefert nun den gewünschten Widerspruch.