Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 8, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 26 (Zum warm werden etwas Kombinatorik).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^\infty(U)$. Die zugehörige Taylorreihe bei $u \in U$ ist gegeben durch

$$T_u^\infty(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(u)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Wieviele verschiedene Monome enthält der Term

$$P_k := \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(u)}{\alpha!} x^\alpha?$$

P_k enthält genau $\binom{n+k-1}{k}$ verschiedene Monome.

G 27 (Taylorpolynome).

(a) Berechne das Taylorpolynom $T_0^4(f)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := xyz \sin(x+y+z)$$

mit Hilfe von Satz X.3.8.

(b) Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (e^x, \sin y) \ \text{ und } \ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = \frac{x}{1+y^2}.$$

Sei $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechne das Taylorpolynom $T_0^2(h)$ auf zwei verschiedene Arten.

(a) *Wir setzen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) := xyz$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := \sin(x+y+z)$. Dann gilt nach Satz X.3.8 (b): $T_0^4(f) = T_0^4(g \cdot h) = T_0^4(T_0^4(g) \cdot T_0^4(h))$. Nun ist $T_0^4(g)(x,y,z) = xyz$ und $T_0^4(h)(x,y,z) = (x+y+z) + \frac{1}{6}(x+y+z)^3$. Folglich gilt $T_0^4(T_0^4(g) \cdot T_0^4(h))(x,y,z) = xyz(x+y+z)$*

(b) *Nach Satz X.3.8(c) gilt $T_0^2(h) = T_0^2(g \circ f) = T_0^2(T_{(1,0)}^2(g) \circ (T_0^2(f) - (1,0)))$. Nun ist $T_0^2(f)(x,y) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2, y)$, also $T_0^2(f)(x,y) - (1,0) = (x + \frac{1}{2}x^2, y)$ und $T_{(1,0)}^2(g)(x,y) = 1 + x - y^2$. Folglich gilt $T_{(1,0)}^2(g) \circ (T_0^2(f) - (1,0))(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - y^2$ und somit $T_0^2(h) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - y^2$.*

G 28 (Lokale Extrema).

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

---

f ist in $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbar, und es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$\nabla f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(x(-8x^2 - 2y^2 + 8), y(-8y^2 - 32x^2 + 2))$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (16x^4 - 40x^2 + 4x^2y^2 + 8 - 2y^2)e^{-x^2-4y^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (64x^3y - 68xy + 16xy^3)e^{-x^2-4y^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (64y^4 - 40y^2 + 256x^2y^2 - 32x^2 + 2)e^{-x^2-4y^2}$.

Notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extremas in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Nachrechnen liefert folgende kritische Punkte:

$$(0, 0), (0, \frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{2}), (1, 0) \ \textit{und} \ (-1, 0).$$

Weiter gilt:

$$H_{(0,0)}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \textit{ist positiv definit},$$

$$H_{(1,0)}(f) = H_{(-1,0)}(f) = \begin{pmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -30e^{-1} \end{pmatrix} \ \textit{ist negativ definit},$$

$$H_{(0,\frac{1}{2})}(f) = H_{(0,-\frac{1}{2})}(f) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix} \ \textit{ist indefinit}.$$

Nach Satz X.4.10 gilt daher: f hat in $(0, 0)$ ein lokales Minimum und in $(\pm 1, 0)$ ein lokales Maximum.

G 29 (Eine Anwendung).

Beweise:

Für N Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein Minimum x_0 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ f(x) := ||x - a_1||_2^2 + ||x - a_2||_2^2 + \ldots + ||x - a_N||_2^2.$$

Interpretiere zunächst den Fall $n = 2$. Welchen Wert x_0 erwartet man hier?

Die Gleichung $\nabla f(x) = 0$ hat genau eine Lösung:

$$x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}{N}.$$

Die Hessematrix der Funktion f an der Stelle x_0 ist gegeben durch $H_{x_0}(f) = 2NE_n$, wobei E_n für die n-dimensionale Einheitsmatrix steht. Das Hurwitzkriterium (oder direktes nachrechnen der Definition) liefert nun, dass $H_{x_0}(f)$ positiv definit ist, also bei x_0 ein lokales Minimum vorliegt.

Hausübung

H 29 (Konvergenz der Taylorreihe).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Es gebe Konstanten $M, r > 0$, so dass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und für alle $x \in B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, ||x - x_0||_1 < r\}$ die Abschätzung

$$|D^\alpha f(x)| \leq s! M r^{-s} \text{ für } |\alpha| = s$$

gilt. Dann ist die Taylorreihe

$$T_u^\infty(f)(x - x_0) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

für jedes $\rho \in (0, r)$ auf der Menge $B_\rho(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, ||x - x_0||_1 < \rho\}$ absolut und gleichmäßig konvergent und erfüllt dort

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Hinweis: Es gilt der Multinomialsatz

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Aus der Voraussetzung folgt mit $h = x - x_0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} h^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{|(D^\alpha f)(x_0)|}{\alpha!} |h|^\alpha$$

$$\leq M r^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |h_1|^{\alpha_1} |h_2|^{\alpha_2} \cdots |h_n|^{\alpha_k} \leq M r^{-k} ||h||_1^k \leq M(\frac{\rho}{r})^k.$$

Die geometrische Reihe ist also eine konvergente Majorante. Folglich ist die Taylorreihe gleichmäßig und absolut konvergent in $B_\rho(x_0)$. Die zweite Behauptung folgt aus der Restglieddarstellung aus Satz X.3.11: Für $h = x - x_0$ und

$$R_k(h) := \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x_0 + \tau h)^\alpha$$

gilt die Abschätzung $R_k(h) \leq M(\frac{\rho}{r})^{k+1}$ und damit $R_k(h) \to 0$ für $k \to \infty$

H 30 (Extremwertaufgabe).

Konstruiere dasjenige Dreieck, für welches das Produkt der Sinuswerte der Winkel am größten ausfällt.

Laut Aufgabenstellung suchen wir das Maximum der Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \pi; 0 \le x+y \le \pi\} \to \mathbb{R}, \; f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x+y).$$

Da f im Inneren dieses Bereichs positiv ist, so ist sicherlich auch der dort von f angenommene größte Wert positiv. Am Rande des Bereichs, wo also in mindestens einer der den Bereich definierenden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt, ist $f(x, y) = 0$. Somit liegt der größte Wert im Inneren. Durch Differenzieren und Nullsetzen folgen die beiden Gleichungen:

$$\cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0$$
$$\sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0,$$

aus welchen man nun wegen $0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < x + y < \pi$ die Bedingung $\tan x = \tan y$ oder $x = y$ entnimmt. Setzen wir diesen Wert etwa in die erste Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung $\sin 3x = 0$. Hieraus folgt $x = \frac{\pi}{3}$. Der einzige kritische Punkt ist demnach $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Da die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \pi; 0 \le x + y \le \pi\}$ ein Maximum im Inneren annimmt, ist $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ das gesuchte Maximum.

Alternativ kann man die Hessematrix $H_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})}(f)$ berechnen. Diese ist negativ definit, so dass in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ ein Maximum vorliegt.

Das gesuchte Dreieck ist also gleichseitig.

H 31 (Bifurkation).

Bestimme die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x, y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2$$

in Abhängigkeit von $\lambda > 0$.

Bemerkung: Die Aufgabe hat es in sich. Gehe sorgfältig vor!

Es ist $f(x, y) = f(-x, -y)$, und $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2\lambda y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + y^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2\lambda + x^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$.

Offenbar ist der Nullpunkt ein kritischer Punkt, und die Diskriminante hat dort den Wert $\det(H_{(0,0}(f)) = 4\lambda - 1$. Für $\lambda > \frac{1}{4}$ liegt also ein Minimum und für $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ ein Sattelpunkt vor. Im Grenzfall $\lambda = \frac{1}{4}$ gibt Satz X.4.10 keine Auskunft. Jedoch zeigt die Abschätzung

$$f(x, y) = 1 + (x + \frac{y}{2})^2 + (e^{xy} - 1 - xy) > 1 + (x + \frac{y}{2})^2 \;\text{ für }\; xy \neq 0$$

(wegen $e^s - 1 - s > 0$ für $s \neq 0$) und eine Betrachtung der Fälle $x = 0$ und $y = 0$, dass $f(x, y) > 1 = f(0, 0)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ ist. Da bei Vergrößerung von λ auch f zunimmt, gilt diese Abschätzung für alle $\lambda \ge \frac{1}{4}$, d.h. f hat im Nullpunkt ein globales Minimum.

Bei der Suche nach weiteren kritischen Punkten stellt man zunächst fest, dass aus $\nabla f(x,y) = 0$ folgt $xye^{xy} = -2x^2 = -2\lambda y^2$, also $x = -\mu y$ mit $\mu = \sqrt{\lambda}$ (das positive Vorzeichen scheidet offenbar aus). Als Bedingung für $\frac{\partial f}{\partial x}$ ergibt sich

$$e^{-\mu y^2} = 2\mu.$$

Diese Gleichung hat nur dann Lösungen $y \neq 0$, wenn $\mu < \frac{1}{2}$ ist. Die positive Lösung

$$y_0 = \sqrt{-(\ln 2\mu)/\mu}$$

führt, zusammen mit dem zugehörigen Wert $x_0 = -\mu x_0$, auf zwei im zweiten und vierten Quadranten gelegene Punkte $\pm(x_0, y_0)$. Weitere stationäre Punkte sind nicht vorhanden. Da f in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_r(0)$ ein Minimum besitzt, andererseits für große Werte von r auf dem Rand von $B_r(0)$ sicher > 1 ist, muß es sich um Minimalstellen handeln (f ist symmetrisch zum Nullpunkt). Auf dasselbe Ergebniss führt die Berechnung der Determinate: Setzt man in die zweiten Ableitungen den Wert $e^{x_0 y_0} = 2\mu$ ein, so erhält man $\det(H_{(x_0,y_0)}(f)) = 16\lambda\mu y_0^2 > 0$.

Fassen wir zusammen: Für $\lambda \geq \frac{1}{4}$ wird das globale Minimum im Nullpunkt, für $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ in den beiden Punkten $\pm(-\sqrt{\lambda}y_0, y_0)$ mit $y_0^2 = -(\ln(2\sqrt{\lambda}))/\sqrt{\lambda}$ angenommen, während der Nullpunkt ein Sattelpunkt ist. Das Minimum hat den Wert 1 bzw. $2\sqrt{\lambda}(1 - \ln(2\sqrt{\lambda}))$. Es gibt keine weiteren lokalen Extrema.

Das hier beobachtete Verhalten tritt bei vielen nichtlinearen Problemen auf, die von einem Parameter λ abhängen. Eine gewisse, von λ abhängige Größe (hier die Minimalstelle) ist zunächst (hier für $\lambda > \frac{1}{4}$) eindeutig bestimmt, spaltet sich aber, wenn man einen Grenzpunkt λ_0 (hier $\frac{1}{4}$) überschreitet, in zwei oder mehrere Lösungen auf. Das Phänomen wird Bifurkation *oder* Verzweigung, *der Punkt λ_0* Verzweigungs- *oder* Bifurkationspunkt *genannt.*

H 32 (Kritische Punkte eines Quotienten).

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f, g \in C^1(U)$ und $g(x) \neq 0$.

(a) Zeige: $\nabla F(x) = 0$ ist äquivalent zu $\nabla f(x) = F(x) \cdot \nabla g(x)$.

(b) Als Beispiel betrachte den sogenannten *Rayleigh-Quotient*:

$$R : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ R(x) = \frac{x^T A x}{||x||_2^2}$$

für eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Bestimme eine Gleichung für die kritischen Punkte von R.

Bemerkung: Der Quotient ist benannt nach dem englischen Physiker *John William Strutt*, dritter *Baron Rayleigh* (1842-1908, Professor in Cambridge und London, 1904 Nobelpreis für Physik, 1905-1908 Präsident der Royal Society) und spielt in der Theorie der Eigenwerte eine wichtige Rolle.

(a) *Die Behauptung folgt direkt aus $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{f_{x_i}(x)g(x) - f(x)g_{x_i}(x)}{g(x)^2}$ für $1 \leq i \leq n$.*

(b) *Die kritischen Punkte von R sind genau die Lösungen der Gleichung $Ax = F(x) \cdot x$, also die Eigenwerte der Matrix A. Dies sieht man so: Setze*

$$f(x) = x^T Ax = 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \text{ und } g(x) = ||x||_2^2.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i.$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 2x_k.$$