Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 7, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 22 (Veranschaulichen von Funktionen).

Veranschauliche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ mit Hilfe von Höhenlinien.

Für $c \in \mathbb{R}$ setze $\sin(x^2 + y^2) = c$ und löse die Gleichung auf. Ist $|c| > 1$, so ist die Lösungsmenge leer. Gilt $|c| < 1$, so ist die Lösungsmenge ein Kreis vom Radius $r = \sin^{-1}(c)$.

G 23 (Differenzierbarkeit und Taylorpolynome).

(a) Sei $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Zeige, dass dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) (i) Bestimme das Taylorpolynom 2.Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^y.$$

im Punkt $(1, 1)$.

(ii) Bestimme das Taylorpolynom 4.Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) := xyz \sin(x + y + z)$$

im Punkt $(0, 0, 0)$.

(a) Dies ist elementares Nachrechnen.

(b) (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x \cdot x^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + \ln x \cdot x^{y-1} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\ln x)^2 x^y$. Somit gilt:
$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(1, 1) = 1$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 0$. Damit ergibt sich:
$T_2 f((x, y); (1, 1)) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1)$.

(ii) Es gilt: $T_4 f((x, y, z); (0, 0, 0)) = xyz(x + y + z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

G 24 (Jacobi-Matrizen und Kettenregel).

(a) Berechne die Jacobi-Matrizen der Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ xy^2 \end{pmatrix}, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos(xyz) \end{pmatrix}.$$

(b) Berechne die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf zwei verschiedene Arten.

(a) Es gilt

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ y^2 & xy \end{pmatrix}, \text{ sowie } J_{(x,y,z)}(g) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ -yz\sin(xyz) & -xz\sin(xyz) & -xy\sin(xyz) \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist $h(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x^2) \\ \cos(x^4y^3) \end{pmatrix}$. *Folglich gilt*

$$J_{(x,y)}(h) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) & 0 \\ -4x^3y^3\sin(x^4y^3) & -3x^4y^2\sin(x^4y^3) \end{pmatrix}.$$

Andererseits liefert die Kettenregel

$$J_{(x,y)}(h) = J_{(f(x,y))}(g) \cdot J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) & 0 \\ -4x^3y^3\sin(x^4y^3) & -3x^4y^2\sin(x^4y^3) \end{pmatrix}.$$

G 25 (Jacobi-Matrix).

Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Abbildung F wird oft in der Physik verwendet und als Kugelkoordinaten-Transformation bezeichnet.

Es gilt

$$J_{(r,\theta,\varphi)}(F) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

H 25 (Differenzierbarkeit).

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) := 3x^2y + 2xy^2 + e^z$.

(a) Berechne die partiellen Ableitungen von f.

(b) Prüfe nach, ob f total differenzierbar ist und gib gegebenenfalls die Jacobi-Matrix $J_p(f)$ im Punkt $p = (2, 1, 0)$ an.

(c) Berechne näherungsweise $f(2.1, 0.8, 0.15)$ mit Hilfe der linearen Approximation und vergleiche den Wert mit dem exakten Funktionswert.

(a) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4xy$, $\frac{\partial f}{\partial z} = e^z$.

(b) Die Funktion f ist offenbar stetig partiell differenzierbar. Nach Satz X.2.13 ist somit f differenzierbar. In $p = (2, 1, 0)$ gilt $J_p(f) = (14, 20, 1)$.

(c) Es ist $f(2.1, 0.8, 0.15) \approx 14,4338$. *Für die lineare Approximation gilt:*

$$T_1 f((2.1, 0.8, 0.15); (2, 1, 0)) = f(2, 1, 0) + (14, 20, 1) \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.15 \end{pmatrix} = 14,55.$$

H 26 (Kettenregel).

Beweise ausgehend von der Kettenregel aus der Vorlesung die folgende Aussage: Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und V eine offene Teilmenge von .$\mathbb{R}^n$. Außerdem seien Funktionen $g : U \to V$ und $f : V \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Die Funktion g sei in $a \in U$ differenzierbar, die Funktion f sei in $g(a)$ differenzierbar. Zeige, dass dann gilt

$$\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_l}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_l}(a) \quad 1 \le i \le k,\ 1 \le l \le m.$$

Bemerkung: Mit dieser Fundamentalen Formel werden partielle Ableitungen zusammengesetzter Funktionen in konkreten Fällen berechnet.

Dies folgt sofort aus Satz X.2.9 und der Kettenregel.

H 27 (Jacobi-Matrizen und Richtungsableitungen).

(a) Berechne die Jacobi-Matrizen der Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \\ e^{xy} \end{pmatrix}, \quad g : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, z \neq 0 \right\} \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{xe^y}{z}.$$

(b) Berechne die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne die Richtungsableitungen der Funktionen

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(xy), \text{ bzw. } k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto e^{xyz},$$

an der Stelle $(1,1)^t$ in Richtung $(1,1)^t$ bzw. an der Stelle $(1,1,1)^t$ in Richtung $(1,2,1)^t$. Die Operation t steht hierbei für das Transponieren eines Vektors.

(a) *Es gilt*

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}, \text{ sowie } J_{(x,y,z)}(g) = (\frac{e^y}{z}, \frac{xe^y}{z}, -\frac{xe^y}{z^2}).$$

(b) *Es ist $h(x,y) = x^2 + y^2$. Folglich gilt*

$$J_{(x,y)}(h) = (2x, 2y).$$

Andererseits liefert die Kettenregel

$$J_{(x,y)}(h) = J_{(f(x,y))}(g) \cdot J_{(x,y)}f = (2x, 2y).$$

(c) *Die Funktionen h und k sind differenzierbar (dies zeigt man direkt oder man weist die Stetigkeit der partiellen Ableitungen nach). Folglich gilt:*

$$\langle \nabla h(1,1), (1,1)^t \rangle = 2\cos 1 \textit{ sowie } \langle \nabla k(1,1,1), (1,2,1)^t \rangle = 4e.$$

H 28 (Polarkoordinaten).

Die Funktion $g :]0,\infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ führt Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten über.

(a) Veranschauliche die Funktion g.

(b) Berechne $\frac{\partial}{\partial\varphi}(f \circ g)$ und $\frac{\partial}{\partial r}(f \circ g)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion bezeichnet.

(c) Was bedeutet $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial r}$ anschaulich?

(d) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Berechne $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h \circ g)$ und $\frac{\partial}{\partial r}(h \circ g)$ auf zwei verschiedene Arten.

(a) *Parallelen zur φ-Achse zwischen $[0, 2\pi)$ werden auf einen Kreis vom Radius r abgebildet. Paralellen zur r-Achse werden auf geraden durch den Ursprung abgebildet.*

(b) *Sei* $p := \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$. *Aufgabe H26 liefert*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(f \circ g)(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p))(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p))(r\cos\varphi)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}(f \circ g)(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p))\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p))\sin\varphi.$$

(c) *Anschaulich gibt* $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ *die infinitesimale Aenderung des Laufwinkels* φ *an. Genauso gibt* $\frac{\partial}{\partial r}$ *die infinitesimale radiale Aenderung an.*

(d) *Es ist* $(h \circ g)(r, \varphi) = r^2$. *Folglich gilt* $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h \circ g) = 0$ *und* $\frac{\partial}{\partial r}(h \circ g) = 2r$. *Andererseits folgt mit Aufgabe (b):*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(h \circ g)(r, \varphi) = (2r\cos\varphi)(-r\sin\varphi) + (2r\sin\varphi)(r\cos\varphi) = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}(h \circ g) = (2r\cos\varphi)\cos\varphi + (2r\sin\varphi)\sin\varphi = 2r.$$