Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 6, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 18 (Bogenlängen von Kurven I).

Seien $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $r > 0$. Man berechne die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \; f(t) := (r \cos t, r \sin t, ct).$$

Die Kurve ist trivialerweise stetig differenzierbar, daher erhält man für die Bogenlänge L der Kurve gegeben durch

$$L = \int_a^b ||f'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{r^2 + c^2}dt = (b - a)\sqrt{r^2 + c^2}.$$

G 19 (Bogenlänge von Kurven II).

Sei $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \; f(t) := (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t).$$

Die Kurve γ heißt *logarithmische Spirale.*

(a) Skizziere die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

(b) Für $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $\gamma_{|[a,b]}$. Berechne $L_{a,b}$.

(c) Existiert $\lim_{a \to -\infty} L_{a,0}$?

(a) Siehe Übung.

(b) f ist eine stetig differenzierbare Kurve mit

$$f'(t) = (ce^{ct} \cos t - e^{ct} \sin t, ce^{ct} \sin t + e^{ct} \cos t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher gilt

$$L_{a,b} = \int_a^b ||f'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{e^{2ct}((c \cos t - \sin t)^2 + (c \sin t + \cos t)^2)}dt$$

$$= \int_a^b e^{ct}\sqrt{c^2 + 1}dt = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{c}(e^{cb} - e^{ca}).$$

(c) Nach (b) erhält man $L_{a,0} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}(1 - e^{ca})$. Also gilt:
Für $c > 0$ ist $\lim_{a \to -\infty} e^{ca} = 0$, also $\lim_{a \to -\infty} L_{a,0} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}$.
Für $c < 0$ existiert der Grenzwert nicht.

G 20 (Rechenregel für das Ableiten des Vektorprodukt).

Auf dem mit dem Standard-Skalarprodukt versehenen $\mathbb{R}^3$ definiert man für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

(a) Zeige, dass $a \times b$ senkrecht auf a und b steht.

(b) Zeige: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sind $a, b : D \to \mathbb{R}^3$ auf ganz D differenzierbare Funktionen, so gilt:

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \dot{a} \times b + a \times \dot{b}.$$

(a) Eine kurze Rechnung ergibt $\langle a, a \times b\rangle = \langle b, a \times b\rangle = 0$.

(b) Für $i, j = 1, 2, 3$ *und* $i \neq j$ *gilt* $\frac{d}{dt}(a_ib_j - a_jb_i) = \dot{a}_ib_j - \dot{a}_jb_i + a_i\dot{b}_j - a_j\dot{b}_i$ *und folglich*

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \dot{a} \times b + a \times \dot{b}.$$

G 21 (Geometrie der Planetenbewegung).

Die Bewegung eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne wird nach der Newtonschen Mechanik durch eine Kurve $x : D \to \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ modelliert, die der Gleichung

$$m\ddot{x} = -\gamma M m \frac{x}{||x||^3},$$

genügt. Hierbei steht γ für die Gravitationskonstante, M für die Masse der Sonne und m für die Masse des Planeten. Die Sonne liegt hierbei im Koordinatenursprung.

Die Diskussion einer Lösungskurve beruht auf den folgenden physikalischen Größen:

(1) $J := x \times m\dot{x}$, dem Drehimpulsvektor und

(2) $A := \frac{1}{\gamma Mm} J \times \dot{x} + \frac{x}{||x||}$, dem Achsenvektor.

Zeige die zeitliche Konstanz von J und A.

Hinweis: Nutze bei (2) die sogenannte *Graßmann-Identität*:

$$(a \times b) \times c = -\langle b, c\rangle a + \langle a, c\rangle b.$$

Es gilt:

$\dot{J} = \dot{x} \times m\dot{x} + x \times m\ddot{x} = 0$, *wegen (a) und*

$\dot{A} = \frac{1}{\gamma Mm}(\dot{J} \times \dot{x} + J \times \ddot{x}) + \big(\frac{\dot{x}}{||x||} - \frac{\langle x,\dot{x}\rangle}{||x||^3}x\big) = \big(-(x \times \dot{x}) \times \frac{x}{||x||^3}\big) + \big(\frac{\dot{x}}{||x||} - \frac{\langle x,\dot{x}\rangle}{||x||^3}x\big) = 0$

(Graßmann-Identiät).

Hausübung

H 21 (Zykloide).

Ein Rad mit Radius r rolle auf der x-Achse; hierbei bewege sich der Mittelpunkt M des Rades mit konstanter Geschwindigkeit v. Ferner sei P ein fester Punkt auf der Radperipherie, und P befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt.

(a) Bestimme die Bahnkurve $R(t)$ von P mit der Zeit t als Parameter.

(b) Bestimme das Maximum und das Minimum des Betrags $||R'(t)||$ der Geschwindigkeit $R'(t)$ von P.

(a) Es gilt $R(t) = (x(t), y(t)) = \underbrace{(vt, r)}_{Mittelpunkt} - r(\sin(\frac{vt}{r}), \cos(\frac{vt}{r}))$.

(b) Für die Geschwindigkeit gilt $R'(t) = (v - v\cos(\frac{vt}{r}), v\sin(\frac{vt}{r}))$, *also* $||R'(t)||^2 = 2v^2(1 - \cos(\frac{vt}{r}))$.

Folglich wird $||R'(t)||$ *maximal für* $\cos(\frac{vt}{r}) = -1$, *also für* $t_{max} = (2k+1)\frac{\pi r}{v}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Es gilt* $||R'(t_{max})|| = 2v$.

$||R'(t)||$ *wird minimal für* $\cos(\frac{vt}{r}) = 1$, *also für* $t_{min} = \frac{2k\pi r}{v}$, $k \in \mathbb{N}$. *Es gilt* $||R'(t_{min})|| = 0$.

H 22 (Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung).

Sei $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar und $f : X \to \mathbb{R}^k$ eine Funktion, für die die Komposition $f \circ \gamma$ integrabel ist. Zeige, dass das Integral $\int_\gamma f$ von der Parametrisierung von γ unabhängig ist.

Es sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Umparametrisierung der stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a,b] \to X \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiter sei $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung, für die alle Wege $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar sind. Da φ bijektiv und monoton wachsend ist gilt $c = \varphi^{-1}(t_0) < \varphi^{-1}(t_1) < \ldots < \varphi^{-1}(t_n) = d$. Wenden wir die Kettenregel komponentenweise an, so folgt $(\gamma \circ \varphi)'(t) = \dot\gamma(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ und daher wegen $\varphi'(t) \geq 0$:

$$\int_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} f((\gamma\circ\varphi)(t)) \cdot ||(\gamma\circ\varphi)'(t)||dt = \int_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} f(\gamma(\varphi(t))) \cdot ||\dot\gamma(\varphi(t))|| \cdot \varphi'(t)dt.$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(\tau)) \cdot ||\dot\gamma(t)||dt.$$

Hierbei beachten wir, dass das Produkt der integrablen Funktionen $f \circ \gamma \circ \varphi$ und $||(\dot{\gamma \circ \varphi})||$ ebenfalls integrabel ist (Lemma VI.1.13). Durch Zusammensetzen der Stücke erhält man die Behauptung.

H 23 (Differenzierbarkeit).

Überprüfe die Differenzierbarkeit folgender Funktionen und gib an den differenzierbaren Stellen das zugehörige Differential an:

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^T Ax$ für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2$.

(a) Es gilt $f(p+h) - f(p) = 2p^T Ah + h^T Ah$. $Lh := 2p^T Ah$ definiert eine lineare Abbildung und $R(h) := h^T Ah$ erfüllt die Bedingung $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{||h||} = 0$. Es gilt nämlich $|R(h)| \leq \sigma||h||_\infty^2$. Die Funktion f ist also in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und es gilt $df(p)h = 2p^T Ah$ und $J_p(f) = 2p^T A$.

(b) Es gilt $f(X+H) - f(X) = (X+H)^2 - X^2 = XH + HX + H^2$. $LH := XH + HX$ definiert eine lineare Abbildung und $R(H) := H^2$ erfüllt die Bedingung $\lim_{H\to 0} \frac{R(H)}{||H||_{\mathrm{op}}} = 0$. Es gilt nämlich $||H^2||_{\mathrm{op}} \leq ||H||_{\mathrm{op}}^2$ und folglich $\lim_{H\to 0} \frac{||H^2||_{\mathrm{op}}}{||H||_{\mathrm{op}}} \leq \lim_{H\to 0} ||H||_{\mathrm{op}} = 0$ Hieraus schließt man, dass $\lim_{H\to 0} \frac{R(H)}{||H||_{\mathrm{op}}} = 0$ gilt. Die Funktion f ist also in jedem Punkt $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ differenzierbar, und es gilt $df(X)H = XH + HX$.

H 24 (Differzierbarkeit und Kettenregel).

Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, U eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$, differenzierbar.

(a) Sei $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung, d.h. $g(x) = Ax + b$ für $b \in \mathbb{R}^n$. Für welche $x \in \mathbb{R}^k$ ist die Abbildung $F := f \circ g$ differenzierbar? Gib an den differenzierbaren Stellen das zugehörige Differential an.

(b) Sei $\gamma : D \to U$ eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass $f \circ \gamma : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist und gib den Tangentialvektor an der Stelle $t_0 \in D$ an.

(a) *Die Abbildung F ist auf der Menge $g^{-1}(U)$ differenzierbar, und für $x \in g^{-1}(U)$ gilt $J_x(F) = J_{Ax+b}(f) \circ J_x(g) = J_{Ax+b}(f) \cdot A$.*

(b) *Nach der Kettenregel ist $f \circ \gamma$ auf D differenzierbar und hat für $t_0 \in D$ den Tangentialvektor*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = df(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0).$$