Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 5, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 15 (Die 2-dimensionale Drehgruppe).

In Analysis I haben wir den Begriff der *Gruppe* kennengelernt. Zur Erinnerung: Eine Menge G zusammen mit einer binären Operation (auch Multiplikation genannt)

$$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x * y$$

heißt *Gruppe*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(A) *Assoziativgesetz*: $(\forall x, y, z \in G)\ \ x * (y * z) = (x * y) * z;$

(N) *Neutrales Element*: $(\exists e \in G)\ (\forall x \in G)\ \ e * x = x * e = x;$

(I) *Existenz eines Inversen*: $(\forall x \in G)\ (\exists y \in G)\ \ x * y = y * x = e.$

Im folgenden sind wir an der sogenannten 2-dimensionalen Drehgruppe

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

interessiert. Die Multiplikation ist hierbei durch die gewöhnliche Matrixmultiplikation in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ gegeben.

(a) Weise nach, dass es sich bei $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ wirklich um eine Gruppe handelt. Dabei kannst du auf den Nachweis der Assoziativität verzichten, da sich diese direkt von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vererbt. Wieso wird $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ Drehgruppe genannt?

(b) Mache dir kurz klar, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

bijektiv ist und durch $||A|| := ||\Phi(A)||_\infty$ eine Norm auf $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ definiert wird. Hiermit wird $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), ||\cdot||)$ zu einem normierten Raum.
Zeige, dass eine Abbildung $f : V \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ von einem normierten Raum V nach $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ genau dann stetig ist, wenn alle Komponentenfunktionen

$$f_i : V \to \mathbb{R},\ 1 \le i \le 4$$

stetig sind.

(c) Zeige, dass die sogenannte Transposition

$$T : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto X^T := \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

stetig ist. Schließe hiervon auf die Stetigkeit der Inversion

$$\iota : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}.$$

(d) Zeige, dass die gewöhnliche Matrizenmultiplikation

$$m : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ (A, B) \mapsto A \cdot B$$

stetig ist. Schließe dann, dass auch die Gruppenmultiplikation

$$m : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ (A, B) \mapsto A \cdot B$$

stetig ist.

(e) Zeige, dass $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kompakt ist.
Hinweis: Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, betrachte die Funktion

$$f : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R},\ A \mapsto (A \cdot A^T - E, \det(A)).$$

Hierbei steht E für die Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und $\det : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ für die Determinantenfunktion. Überlege dir kurz, dass die Funktion f stetig ist. Zeige anschließend, dass $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = f^{-1}((0, 1))$ gilt.

Bemerkung: Eine Gruppe, die zugleich ein metrischer (oder allg. topologischer) Raum ist, so dass Multiplikation und Inversion stetige Abbildungen sind, bezeichnet man auch als *topologische Gruppe*. Wir haben uns also davon überzeugt, dass $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ eine kompakte topologische Gruppe ist.

(a) *Ist* $A := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ *und* $B := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ *für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *so gilt*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *ist also unter Multiplikation abgeschlossen.*
Das Neutralelement von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *ist gegeben durch die Einheitsmatrix* E *von* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
Das Inverse zu A *ist gegeben durch die Matrix*

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *wird Drehgruppe genannt, da ihre Elemente Drehungen in* $\mathbb{R}^2$ *um den Nullpunkt beschreiben.*

(b) *Die Bijektivität von* Φ *und die Normeigenschaften sind leicht nachzurechnen. Sei nun* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge in* V *mit Grenzwert* $x \in V$. *Dann gilt für* $1 \leq i \leq 4$ $|f_i(x) - f_i(x_n)| \leq ||f(x) - f(x_n)||$. *Aus der Stetigkeit von* f *folgt also die Stetigkeit der Komponentenfunktionen* f_i.
Sind umgekehrt die Komponentenfunktionen stetig, so existiert für beliebiges $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $n > N$ *und* $1 \leq i \leq 4$ *die Abschätzung* $|f_i(x) - f_i(x_n)| < \epsilon$ *folgt. Somit gilt auch* $||f(x) - f(x_n)|| < \epsilon$ *und folglich ist* f *stetig.*

(c) *Die Stetigkeit folgt unmittelbar aus Teilaufgabe (b). Weiter gilt* $\iota = T_{|\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$. *Als Einschränkung einer stetigen Abbildung ist* ι *stetig.*

(d) *Die Stetigkeit von* m *folgt aus Lemma IX.4.2 (oder aus Teilaufgabe (b)) und aus Beispiel IX.4.5 (Polynomfunktionen sind stetig). Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig.*

(e) *Wir zeigen zunächst einmal die Beschränktheit von* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$*: Für jedes* $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *gilt* $||A|| \leq 1$, *also* $||\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})|| \leq 1$.

Nun wenden wir uns der Abgeschlossenheit von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *zu. Hierzu verwenden wir den Hinweis: Als Komposition stetiger Funktionen ist* f *stetig (beachte, dass die Determinantenfunktion stetig ist). Die Inklusion* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subseteq f^{-1}(0)$ *ist klar.*

Sei umgekehrt $A \in f^{-1}(0)$, *also* $A \cdot T(A) = E$. *Ist*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so bekommen wir vier Gleichungen in den vier Unbekannten:

$a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ *und* $ad - bc = 1$. *Hieraus folgt* $a = d$ *und* $b = -c$. *Außderdem können wir* a, b *als* $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$ *realisieren.*

Wir erhalten also wie gewünscht $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = f^{-1}((0,1))$. *Hieraus folgt, dass* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion abgeschlossen ist.*

Somit ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *abgeschlossen und beschränkt und folglich kompakt nach dem Satz von Heine-Borel (wir beziehen uns hier auf die Identifikation von* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *mit* $\mathbb{R}^4$ *bezüglich der Abbildung* Φ*).*

G 16 (Stetigkeit der Umkehrfunktion).

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zusätzlich sei X kompakt.
Beweise: Ist die Funktion $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Um die Stetigkeit von f^{-1} *nachzuweisen, zeigen wir, dass das Urbild offener Mengen wieder offen ist oder was hierzu äquivalent ist, dass das Urbild abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.*

Sei also $A \subseteq X$ *abgeschlossen. Aus der Kompaktheit von* X *folgt die Kompaktheit von* A *(Satz IX.3.6 (2)). Weiter gilt* $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$. *Da* f *stetig ist und* A *kompakt, ist* $f(A)$ *ebenfalls kompakt. Als kompakte Teilmenge des metrischen Raumes* Y *ist* $f(A)$ *abgeschlossen (Satz IX.3.6 (1)). Wir haben also gezeigt, dass das Urbild abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Hieraus folgt die Stetigkeit von* f^{-1}.

G 17 (Richtungsgrenzwert und Stetigkeit).

Bestimme (im Falle der Existenz) die Richtungsgrenzwerte der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, 0)$:

(a) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$

(b) $f(x,y) := \begin{cases} |\frac{y}{x^2}| \cdot e^{-|\frac{y}{x^2}|} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Für $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ und $h > 0$ gilt:

(a) $v_1 \neq v_2$: $\lim_{h\to 0} f(hv) = \frac{v_1+v_2}{v_1-v_2}$;
$v_1 = v_2$: $\lim_{h\to 0} f(hv) = 0$.

(b) $\lim_{h\to 0} f(hv) = \lim_{h\to 0} |\frac{v_2}{v_1^2 h}| \cdot e^{-|\frac{v_2}{v_1^2 h}|} = 0$.

Hausübung

H 17 (Lösungsmengen von Ungleichungen).

Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $r \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Die Mengen $\{x \in X |\ f(x) < r\}$ und $\{x \in X |\ f(x) > r\}$ sind offen in X.

(b) Die Mengen $\{x \in X |\ f(x) \leq r\}$ und $\{x \in X |\ f(x) \geq r\}$ sind abgeschlossen in X.

Es gilt:

(a) $\{x \in X |\ f(x) < r\} = f^{-1}((-\infty, r))$ *und* $\{x \in X |\ f(x) > r\} = f^{-1}((r, \infty))$.

(b) $\{x \in X |\ f(x) \leq r\} = f^{-1}((-\infty, r])$ *und* $\{x \in X |\ f(x) \geq r\} = f^{-1}([r, \infty))$.

H 18 (Satz vom Maximum).

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $C_0(\mathbb{R}^n)$ den Raum der „im Unendlichen verschwindenden" stetigen Funktionen, d.h. es handelt sich um diejenigen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n |\ |f(x)| \geq \epsilon\}$ kompakt ist.

(a) Zeige: Jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ besitzt ein Maximum.

(b) Es sei K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$. Weise nach, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + d_K(x)},$$

in $C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt, wobei d_K die Abstandsfunktion bezeichnet. Wo liegt das Maximum der Funktion?

(a) Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *und* $\epsilon > 0$ *so gewählt, dass die Menge* $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n |\ |f(x)| \geq \epsilon\}$ *nicht leer ist. Dann ist* K_ϵ *kompakt und die Einschränkung von* f *auf* K_ϵ *nimmt auf* K_ϵ *ein Maximum an. Bezeichnet etwa* x_0 *dieses Maximum, so gilt* $f(x_0) \geq \epsilon$*. Für beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt dann* $f(x_0) \geq f(x)$*. Somit ist* x_0 *ein globales Maximum der Funktion* f*.*

(b) Die Abstandsfunktion ist stetig und somit auch die Funktion f*. Da* K *kompakt ist (also insbesondere beschränkt), wird die Funktion für großes* $x \in \mathbb{R}^n$ *beliebig klein. Genauer gilt: Für beliebiges* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $R > 0$*, so dass für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $||x|| > R$ *die Abschätzung* $f(x) < \epsilon$ *folgt. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass aus* $f(x) \geq \epsilon$ *die Abschätzung* $||x|| \leq R$ *folgt. Die Menge* $f^{-1}([\epsilon, \infty[)$ *ist also abgeschlossen und beschränkt und folglich kompakt. Das Maximum von* f *wird offenbar in jedem Punkt* $x \in K$ *angenommen.*

H 19 (Stetigkeit linearer Abbildung).

Satz IX.4.12 liefert vier äquivalente Bedingungen für die Stetigkeit einer linearen Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen.
Beweise: Eine linearen Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen ist stetig genau dann, wenn sie Cauchy-Folgen in V auf Cauchy-Folgen in W abbildet.

Sei zunächst A stetig, daher $||A|| < \infty$. Wähle eine beliebige Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V. Wegen $||Ax_n - Ax_m||_W \leq ||A|| \cdot ||x_n - x_m||_V$, ist dann auch $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Nun nehmen wir an, dass A Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen abbildet. Angenommen A ist nicht stetig. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in V$ mit $||x_n||_V = 1$ und $||Ax_n||_W > n$. Wir definieren nun eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V durch

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{x_n}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also insbesondere eine Cauchy-Folge in V. Wegen $||A\frac{x_n}{n}|| > 1$, erfüllt die Folge $(Ay_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allerdings nicht die Cauchy-Bedingung. Dies liefert einen Widerspruch zur Voraussetzung.

H 20 (Operatornorm).

Berechne die Operatornormen der folgenden linearen Abbildungen:

(a) $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$, $x \mapsto Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$, $x \mapsto Bx$ für $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x \mapsto Cx$ für $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(d) $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x \mapsto Cx$ für $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Es gilt $||A|| = 3$: Für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $||x||_\infty \leq 1$ gilt $||Ax||_\infty = ||(|x_1|, |3x_2|)||_\infty$. Eine Fallunterscheidung liefert $||Ax||_\infty \leq 3$. Andererseits gilt $||Ax||_\infty = 3$ für $x = (1, 0)$. Somit folgt also wie behauptet $||A|| = 3$.

(b) Es gilt $||B|| = 1$: Für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $||x||_2 \leq 1$ gilt $||Bx||_2 = ||x||_2 \leq 1$. Andererseits gilt $||Bx||_\infty = 1$ für $x = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Somit folgt also wie behauptet $||B|| = 1$.

(c) Es gilt $||C|| = 3$: Für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $||x||_\infty \leq 1$ gilt $|Cx| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq 3$. Andererseits gilt $|Cx| = 3$ für $x = (1, 1, 1)$. Somit folgt also wie behauptet $||C|| = 3$.

(d) *Es gilt* $||C|| = \sqrt{3}$: *Für* $x \in \mathbb{R}^3$ *mit* $||x||_2 \leq 1$ *gilt* $|Cx| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq ||(1,1,1)||_2 ||x||_2 \leq \sqrt{3}$ *nach Satz IX.1.5. Andererseits gilt* $|Cx| = 3$ *für* $x = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$. *Somit folgt also wie behauptet* $||C|| = \sqrt{3}$.