Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 4, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 11 (Innere Punkte, Abschluss und Rand).

Bestimme jeweils die inneren Punkte, den Abschluss und den Rand der folgenden Mengen:

(a) $M := \{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$;

(b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;

(c) $B = \{v \in V | \, ||v|| \leq 1\} \subseteq V$, für einen normierten Raum $(V, || \cdot ||)$.

Es gilt

(a) $M^\circ = \emptyset$, $\partial M = \overline{M} = M \cup \{0\}$*;*

(b) $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*;*

(c) $B^\circ = \{v \in V | \, ||v|| < 1\}$, $\partial = \{v \in V | \, ||v|| = 1\}$ *und* $\overline{B} = B$.

G 12 (Etwas Topologie).

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und A, B Teilmengen von X. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$;

(b) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Gilt hier i.A. auch Gleichheit?

(a) $A^\circ \cap B^\circ$ *ist eine offene Menge, welche in* $A \cap B$ *enthalten ist. Nach Definition ist* $(A \cap B)^\circ$ *die groeßte in* $A \cap B$ *enthaltene offene Menge. Also gilt* $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$.

(b) Es gilt Gleichheit: Da $\overline{A} \cup \overline{B}$ *eine abgeschlossene Obermenge von* $A \cup B$ *ist, gilt die Inklusion* $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$*. Andererseits ist auch die Menge* $\overline{A \cup B}$ *abgeschlossen. Da zudem* $A \subseteq \overline{A \cup B}$ *und* $B \subseteq \overline{A \cup B}$ *gelten, folgen die Inklusionen* $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ *und* $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$*, welche zusammen* $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ *ergeben.*

G 13 (Heine-Borel).

Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ gebe es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert. Zeige, dass in diesem Fall A kompakt ist.

Nach dem Satz von Heine-Borel ist zu zeigen, dass A abgeschlossen und beschränkt ist.

A ist abgeschlossen: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$. Da dann auch jede Teilfolge (!) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gilt nach Voraussetzung $a \in A$. Somit ist A abgeschlossen.

A ist beschränkt: Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in A$ mit $||x_n|| > n$. Nach Voraussetzung existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese ist also beschränkt. Da aber $||x_{n_k}|| > n_k$, ist dies ein Widerspruch. Also ist A doch beschränkt.

G 14 (Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft).

Zeige mit Hilfe der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft, dass das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ kompakt ist.

Anleitung: Es sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von I. Setze

$$S := \{s \in I \,|\, [0, s] \text{ wird von einer endlichen Teilüberdeckung von } (U_j)_{j\in J} \text{ überdeckt}\}.$$

Zeige, dass für $b = \sup(S)$ gilt:

(a) $S = [0, b)$ oder $S = [0, b]$.

(b) Führe den Fall $S = [0, b)$ zu einem Widerspruch. Es gilt also $S = [0, b]$.

(c) Führe den Fall $b < 1$ erneut zu einem Widerspruch.

(a) Je nachdem, ob das Supremum b angenommen wird oder nicht, gelten die Inklusionen $S \subseteq [0, b)$ oder $S \subseteq [0, b]$. Gilt umgekehrt etwa $x \in [0, b)$, so existiert ein $s \in S$ mit $x < s < b$ (Definition des Supremums!). Mit $[0, s]$ wird also auch $[0, x]$ endlich ueberdeckt.

(b) Angenommen $S = [0, b)$. Whaele ein U in der Ueberdeckung $(U_j)_{j\in J}$ mit $b \in U$. Dann existiert $a \in I$ mit $a < b$ und $[a, b] \in U$. Nun wird $[0, a]$ von einer endlichen Teilueberdeckung, etwa $(U_{j_k})_{1\leq k\leq n}$ ueberdeckt. Dann wird aber $[0, b)$ von der endlichen Teilueberdeckung $(U_{j_k})_{1\leq k\leq n} \cup U$ ueberdeckt.

(c) Ein aehnliches Argument wie in Teilaufgabe (b) liefert die Behauptung $S = I$.

Hausübung

H 13 (Minimaler Abstand zu einer Menge).

Es sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Man definiert die sogenannte Abstandsfunktion durch

$$d_A(z) := \inf_{a \in A} \{|z-a|\}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Mache dir klar, dass man $d_A(z)$ zu Recht als Abstand von z und A bezeichnet. Zeige dann:

(a) Ist A abgeschlossen, so gibt es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ einen Punkt $a \in A$ mit $d_A(z) = |z-a|$. Gib eine nicht abgeschlossene Menge an, bei der die Behauptung falsch ist.

(b) Die Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit der Nullstellenmenge $\{z \in \mathbb{C} |\, d_A(z) = 0\}$ von d_A übereinstimmt.

Es gilt offenbar $d_A(z) = 0$ fuer $z \in A$ und $d_A(z) > 0$ fuer $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$. Daher kann man $d_A(z)$ zurecht als Abstand von z und A bezeichnen.

(a) *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a \in A$ beliebig. Setze $r := |z-a|$ und betrachte $\widetilde{A} := A \cap B_r(z)$. Dann gilt $d_A(z) = d_{\widetilde{A}(z)}$ (warum?). Weiterhin ist $\widetilde{A}$ beschraenkt und abgeschlossen, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. Die stetige Funktion*

$$\widetilde{A} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto |z-a|$$

hat also ein Minimum auf $\widetilde{A}$, d.h. es gibt ein $a \in \widetilde{A}$ mit $d_{\widetilde{A}}(z) = |z-a|$.

Ein Beispiel einer nicht abgeschlossenen Menge, bei der die Behauptung nicht gilt ist $A = (0,1)$ und $z = 1$.

(b) *Sei zunaechst A abgeschlossen. Die Inklusion $A \subseteq \{z \in \mathbb{C} |\, d_A(z) = 0\}$ ist klar. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $d_A(z) = 0$. Nach Teilaufgabe existiert ein $a \in A$ mit $0 = d_A(z) = |z-a|$. Es gilt also $z = a \in A$.*

Sei nun $A = \{z \in \mathbb{C} |\, d_A(z) = 0\}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Wir zeigen $a \in A$, d.h. $d_A(a) = 0$: Fuer beliebiges $\epsilon > 0$ gilt nach Voraussetzung $0 \leq d_A(a) \leq |a - x_n| < \epsilon$ falls $n \in \mathbb{N}$ nur großgenug ist. Wir koennen also $d_A(a) = 0$ schlie. Dies bedeutet aber gerade, dass a in A liegt. A ist also abgeschlossen.

H 14 (Kompaktheit und Vollständigkeit).

Beweise: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Es ist zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge aus X konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-FOlge in X. Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N_1$ gilt $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine konvergente

Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit einem Grenzwert $a \in X$. Daher gibt es ein $N_2 \in |N$, so dass fuer alle $k \geq N_2$ gilt $d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Nun gilt fuer alle $n \geq N_1$:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_M}) + d(x_{n_M}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

wobei $M \geq \max(N_1, N_2)$ beliebig. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in X$.

H 15 (Stetige Funktionen mehrerer Variablen).

Sind folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(0, 0)$ stetig?

(a) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$

(b) $f(x, y) := \begin{cases} |\frac{y}{x^2}| \cdot e^{-|\frac{y}{x^2}|} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) f ist nicht stetig in $(0, 0)$: Die Folge $(\frac{3}{2n}, \frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge mit der Eigenschaft $\lim_n f(\frac{3}{2n}, \frac{1}{2n}) = \lim_n 2 = 2 \neq 0 = f(0, 0)$.

(b) f ist nicht stetig in $(0, 0)$: Die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge mit der Eigenschaft $\lim_n f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = \lim_n e^{-1} = e^{-1} \neq 0 = f(0, 0)$.

H 16 (Heine-Borel gilt nicht immer!).

In dieser Aufgabe geben wir ein Beispiel dafür, dass im allgemeinen aus „abgeschlossen“ und „beschränkt“ nicht „kompakt“ folgt. Sei $B(\mathbb{N}) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \, ||f||_{\mathbb{N}} \leq \infty\}$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{N}$. In Analysis I haben wir uns klar gemacht, dass $B(\mathbb{N})$ ein normierter Raum ist (vgl. Satz IV.2.4).

(a) Weise nach, dass die Einheitskugel $S := \{f \in B(\mathbb{N}) | \, ||f||_{\mathbb{N}} \leq 1\}$ abgeschlossen und beschränkt ist.

(b) Sei $\delta_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$ die Funktion gegeben durch $\delta_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Zeige: $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge.
(Beachte: $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Funktionen!)

(a) Klar ist, dass die Einheitskugel S beschränkt ist. Nach Teilaufgabe G11(c) ist S auch abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit sieht man auch so: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S mit Grenzwert $x \in B(\mathbb{N})$. Aus der Stetigkeit der Norm folgt dann $||x|| = \lim_n ||x_n|| \leq 1$, also $x \in S$. Alternativ kann man die Offenheit des Komplements von S nachweisen.

(b) Waere S kompakt, so gaebe es nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(\delta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In diesem Fall muesste $(\delta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge sein (konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen!). Allerdings gilt fuer $k \neq l$ $||\delta_{n_k} - \delta_{n_l}|| = 1$, was ein Widerspruch zur Cauchy-Eigenschaft liefert. S kann also nicht kompakt sein.