Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 3, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 8 (Komponentenweise Konvergenz I).

Untersuche die nachstehenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(a) $x_n = (\frac{1}{n}, 0, (-1)^n\frac{1}{n})$;

(b) $x_n = (\frac{(n+5)^{19}}{(n^2+3n+1)^{11}}, (1+\frac{1}{n})^n, 1-\frac{7}{m})$;

(c) $x_n = (\frac{i^n}{n}, (-1)^n - (-1)^{n+1})$;

(d) $x_n = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$.

(a) $(0,0,0)$*;*

(b) $(0,e,1-\frac{7}{m})$*;*

(c) Konvergiert nicht, da die zweite Komponent nicht konvergiert;

(d) $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$*.*

G 9 (Abschätzungen).

Es seien $m,p\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{K}^m$. Zeige die Gültigkeit der folgenden Behauptungen:

(a) $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{m}||x||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$.

(b) $\lim_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

(a) Aus der offensichtlichen Beziehung $|x_k| \leq \sum_{j=1}^m |x_j|^2$ *für* $k=1,...,m$ *folgt sofort* $||x||_\infty \leq ||x||_2$*. Weiter gelten trivialerweise die Ungleichungen*

$$\sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq (\sum_{j=1}^m |x_j|)^2$$

und

$$\sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq m \max_{1\leq j\leq m} |x_j|^2 = m(\max_{1\leq j\leq m})^2.$$

Somit haben wir $||x||_2 \leq ||x||_1$ *und* $||x||_2 \leq \sqrt{m}||x||_\infty$ *gezeigt. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt*

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^M 1\cdot|x_j| \leq (\sum_{j=1}^m 1^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^m |x_j|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}||x||_2,$$

was die Behauptung zeigt.

(b) Es gilt $||x||_p \leq (m)^{\frac{1}{p}}||x||_\infty$*. Hieraus folgt* $|||x||_p - ||x||_\infty| \leq ||x||_\infty|(m)^{\frac{1}{p}} - 1|$*. Die Behauptung folgt nun sofort aus* $\lim_p |(m)^{\frac{1}{p}} - 1| = 0$*.*

G 10 (Geometrie der Einheitskugel).

Es sei $X = \mathbb{R}^2$.

(a) Skizziere die Einheitskugeln bezüglich der Normen $||x||_1, ||x||_2$ und $||x||_\infty$.

(b) Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ heißt *konvex*, falls

$$tx + (1-t)y \in K$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $x, y \in K$. Skizziere einige Beispiele konvexer Mengen in $\mathbb{R}^2$. Wie lässt sich die Eigenschaft der Konvexität geometrisch interpretieren? Zeige, dass die Einheitskugeln aus Teilaufgabe (a) konvex sind.

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $i \in \{1, 2, \infty\}$ betrachte die Mengen

$$S_i(x,y) := \{z \in \mathbb{R}^2 |\ ||x-z||_i = ||y-z||_i = \frac{||x-y||_i}{2}\}$$

Was fällt dir hierbei auf?

(a) Raute, Kreisscheibe, Quadrat.

(b) Dies folgt direkt aus der Dreiecksungleichung.

(c) Für $i = 2$ besteht $S_2(x,y)$ aus genau einem Punkt, für $i \in \{1, \infty\}$ hingegen kann $S_i(x,y)$ aus einem Teil des Randes der Kugel

$$B^i_{||x-y||_i}(x) := \{z \in \mathbb{R}^2 |\ ||x-z||_i \leq \frac{||x-y||_i}{2}\}$$

bestehen.

.

G 11 (Konvexe Funktionen).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) Zeige zunächst durch Rechnung: Ist f affin, d.h. existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = cx + d$ für alle $x \in D$, so ist f sowohl konvex als auch konkav.

(b) Warum folgt dies aus der geometrischen Interpretation der Konvexität?

(c) Ist f konvex und konkav, so ist f affin.

(d) Die Funktion f ist genau dann affin, wenn für alle $a, b \in D$ und alle $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

(e) Sind f_1 und f_2 konvex, so ist $f_1 + f_2$ konvex.

(f) Ist f konvex und $\lambda \geq 0$, so ist λf konvex.

(a) Dies ist einfaches nachrechnen der jeweiligen Definition.

(b) Geometrisch läßt sich die Eigenschaft der Konvexität so interpretieren, dass für $a < b$ in D der Graph von f unterhalb des Graphen der Sekanten durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft. Eine affine Funktion besitzt diese Eigenschaft trivialer Weise.

(c) Kontraposition: Ist f nicht affin, so existieren a, b in D, $a < b$ mit der Eigenschaft $f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$ oder $(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq f((1-\lambda)a + \lambda b)$, d.h. f ist entweder nicht konvex oder nicht konkav.

(d) Dies folgt unmittelbar aus den Teilaufgaben (a) und (c)

(e) Nachrechnen!

(f) Nachrechnen!

Hausübung

H 9 (Komponentenweise Konvergenz II).

Untersuche die nachstehenden Folgen $(x_n)_{\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(a) $x_n = (\frac{2^n}{n!}, \frac{\sin(n)}{n}, n \cdot \tan(\frac{1}{n}))$;

(b) $x_n = (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k \cdot k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k})$;

(a) $(0, 0, 1)$;

(b) Die Folge konvergiert, da ihre Komponenten konvergieren. (Exponentialreihe,Konvergente Majorante,Leibnizkriterium.

H 10 (Eine interessante Metrik auf $\mathbb{R}$).

Man betrachte die Funktion $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\delta(x, y) := \arctan |x - y|.$$

Man zeige, dass δ die Axiome einer Metrik erfüllt.

Durch δ wird eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert, denn:

(1) Die arctan-Funktion hat genau eine Nullstelle bei $x = 0$ (die arctan-Funktion ist streng monoton wachsend und hat eine Nullstelle bei $x = 0$). Daher gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow \arctan |x - y| = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(2) (Symmetrie) Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\delta(x, y) = \arctan |x - y| = \arctan |y - x| = \delta(y, x).$$

(3) (Dreiecksungleichung). Zunächst zeigen wir, dass

$$\arctan(x+y) \leq \arctan(x) + \arctan(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$. Man schliesst mit Hilfe der Substitution $z := t - x$ folgendermaßen:

$$\arctan(x+y) = \int_0^{x+y} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^{x+y} \frac{1}{1+t^2} dt$$
$$= \arctan(x) + \int_0^{y} \frac{1}{1+(z+x)^2} dz \leq \arctan(x) + \int_0^{y} \frac{1}{1+z^2} dz$$
$$= \arctan(x) + \arctan(y).$$

Damit ist $\delta(x,z) = \arctan|(x-y)+(y-z)| \leq \arctan(|x-y|+|y-z|)$ $\leq \arctan(|x-y|) + \arctan(|y-z|) = \delta(x,y) + \delta(y,z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ bewiesen.

H 11 (Metrische Räume sind hausdorffsch).

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, es gilt das „Hausdorffsche Trennungsaxiom“: Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es disjunkte Umgebungen U von x und V von y, d.h. es gilt $U \cap V = \emptyset$.

Sei $\epsilon := \frac{1}{2} d(x,y)$. Dann ist $\epsilon > 0$, und $U := U_\epsilon(x)$, $V = U_\epsilon(y)$ sind Umgebungen von x bzw. y. Diese Umgebungen sind disjunkt, denn gäbe es ein $z \in U \cup V$, so würde

$$2\epsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \epsilon + \epsilon,$$

folgen, also ein Widerspruch!

H 12 (Abgeschlossene Mengen).

Zeige: Sind $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen, so ist auch $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ abgeschlossen.

Hinweis: Sei $(x, y) \notin A \times B$. Zeige, dass das Komplement von $A \times B$ offen ist, d.h. es gibt $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon((x,y)) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \backslash (A \times B)$.

Insbesondere folgt hieraus, dass die Quader

$$Q := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \, a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } i = 1, ..., n\},$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ sind.

Sei $(x, y) \notin A \times B$. Dann gilt $x \notin A$ oder $y \notin B$. Sei etwa $x \notin A$. Da A abgeschlossen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(x) \subseteq (\mathbb{R}^n - A)$. Daraus folgt

$$U_\epsilon((x,y)) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \backslash (A \times B),$$

das Komplement von $A \times B$ ist also offen.