Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 2, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 4 (Zum warm werden).

Begründe die von Physikern beliebten Näherungen $\sin(x) \approx x$, $\cos(x) \approx 1$ und $\tan(x) \approx x$ für „kleine“ $x \in \mathbb{R}$.

Dies folgt direkt aus der Taylorentwicklung der entsprechenden Funktionen, da für kleine $x \in \mathbb{R}$ die Terme höherer Ordnung vernachlässigbar sind.

G 5 (Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens).

Nach Albert Einstein beträgt die Gesamtenergie eines Teilchens der Masse m

$$E = mc^2.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Die Masse ist jedoch von der Geschwindigkeit v des Teilchens abhängig; es gilt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}.$$

Hier ist m_0 die Ruhemasse des Teilchens; die Ruheenergie ist demnach $E_0 = m_0 c^2$. Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{\text{kin}} = E - E_0.$$

Berechne mit Hilfe der binomischen Reihe die kinetische Energie E_{kin}. Kommt dir der erste Term der berechneten Reihe bekannt vor?

Da $v < c$, gilt

$$E_{kin} = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \Big(\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - 1 \Big)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 (\frac{v}{c})^2 + \textit{Glieder höherer Ordnung.}$$

Der Term $\frac{1}{2} m_0 v^2$ repräsentiert die kinetische Energie im klassischen Fall ($v \ll c$), der Term $\frac{3}{8} m_0 v^2 (\frac{v}{c})^2$ ist das Glied niedrigster Ordnung der Abweichung zwischen dem relativistischen Fall und dem klassichen Fall.

G 6 (Taylorentwicklung).

Durch Integration der Taylorreihe der Ableitung von $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ bestimme man die Taylorreihe der Funktion arcsin mit Entwicklungspunkt 0.

Für $|x| < 1$ liefert der Umkehrsatz der Differentialrechnung und Satz VII.1.13

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n-\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} x^{2n}.$$

Wegen $\arcsin(0) = 0$ *erhalten wir aus Satz VI.3.2 damit die Entwicklung*

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n-\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Und wegen

$$\begin{pmatrix} n-\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n+1)(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}$$

ist

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{15}{336}x^7 + \ldots$$

G 7 (Cauchys Beispiel).

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Berechne die zugehörige Taylorreihe von f an der Stelle 0. Auf welcher Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist $T_0^\infty(f)$ konvergent? Auf welcher Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}$ gilt $f = T_0^\infty(f)$.

(a) *Um einzusehen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, bemerken wir zunächst, dass f auf $\mathbb{R}^*$ von der Klasse C^∞ ist und $f^{(n)}(x)$ für $x \neq 0$ von der Form*

$$f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}})$$

ist, wobei $p_0(t) = 1$ und $p_n(t)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grade $3n$ in der Variablen t ist (Induktion). Wegen

$$\lim_{x\to 0} p_n(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}) = 0$$

gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) *Nach Teilaufgabe (a) gilt $\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$, d.h. die Taylorreihe $T_0^\infty(f)$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion. Somit stimmt die Funktion f nur an der Stelle 0 mit ihrer Taylorreihe überein. Es ist also eine besonders schöne Eigenschaft, wenn eine C^∞- Funktion eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ konvergente Taylorreihe besitzt und durch diese dargestellt wird.*

Hausübung

H 5 (Vertauschung von Limes und Integration I).

Es sei $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in [0, \infty)$.

(a) Für welche $x \in [0, \infty)$ konvergiert $f_n(x)$ punktweise gegen eine Funktion $f(x)$?. Bestimme $f(x)$ für diese $x \in [0, \infty)$.

(b) Ist die Konvergenz gleichmässig?

Hinweis: Betrachte die Maxima von f_n.

(c) Gilt

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx?$$

(a) Es gilt $\lim_n f_n(x) = 0$ *für alle* $x \in [0, \infty)$, *d.h. die Folge* $(f_n)_n$ *konvergiert auf* $x \in [0, \infty)$ *punktweise gegen die Nullfunktion.*

(b) Es gilt $(f_n)'(x) = n(1 - 2nx^2)e^{nx^2}$. *Der kritische Punkt ist* $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. *Dass bei* $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ *wirklich ein Maximum vorliegt rechnet man leicht nach, ist aber für die Aufgabe unwichtig. Es folgt* $f_n(x_n) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ *und* $\lim_n f_n(x_n) \to \infty$. *Wegen* $||f_n - f||_\infty = ||f_n||_\infty \geq \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}} \to \infty$ *liegt also keine gleichmäßige Konvergenz vor.*

(c) Es ist $\int_0^\infty f_n(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{-nx^2})dx = \frac{1}{2}$, *aber* $\int_0^\infty f(x)dx = 0$. *Folglich ist* $\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty f(x)dx$.

H 6 (Vertauschung von Limes und Integration II).

Es sei $f_n(x) = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$ für $x \in [0, \infty)$.

Man zeige, dass die Folge $(f_n)_n$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, aber

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx > 0.$$

Ist dies ein Widerspruch zu Satz VI.3.2?

Es gilt $(f_n)'(x) = \frac{1}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}(1 - \frac{x}{n})$. *Daraus sieht man, dass* f_n *im Intervall* $[0, n]$ *monoton wächst und im Intervall* $[n, \infty[$ *monoton fällt. Sie nimmt also für* $x = n$ *ihr absolutes Maximum an, und es gilt*

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n n = \frac{1}{en}$$

für alle $x \in [0, \infty)$ *und alle* $n \geq 1$. *Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge* $(f_n)_n$ *gegen 0. Nun berechnen wir die Integrale*

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}dx.$$

Mit der Substitution $t = \frac{x}{n}$ *wird*

$$\int_0^R \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} dx = \int_0^{R/n} te^{-t} dt,$$

also

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R/n} te^{-t}dt = \int_0^\infty te^{-t}dt.$$

Das Integral $\int_0^\infty te^{-t}dt$ *ist nun echt positiv, da es geometrisch den Flächeninhalt zwischen dem Graph des Integranden und der positiven* x*-Achse angibt (Skizze!). Also gilt*

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx > 0.$$

Dies ist kein Widerspruch zu Satz VI.3.2, da wir dort über eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ *integriert haben.*

H 7 (Ein elliptisches Integral).

Das besonders oft auftretende Integral

$$K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}}, \quad |k| < 1$$

wird auch (vollständiges) elliptisches Integral 1.Gattung genannt.

Elliptische Integrale treten in zahlreichen Anwendungen auf, zum Beispiel bei der Behandlung des mathematischen Pendels. Die Bezeichnung elliptisches Integral hat ihren Ursprung in der Berechnung der Bogenlänge der Ellipse.

Man entwickle $K(k)$ in eine Potenzreihe nach k. Für welche $k \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Hinweis: Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{(2n-1)}{2n} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Die Binomialreihe ergibt für den Integranden die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n}(x).$$

Wegen $|k| < 1$ *stellt* $\sum_{n=0}^\infty k^{2n}$ *eine konvergente Majorante dar; die Reihe konvergiert also gleichmässig in* $]-1,1[$ *und darf somit gliedweise integriert werden. Mit dem Hinweis ergibt sich dann*

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\big(1 + (\frac{1}{2})^2 k^2 + (\frac{3}{8})^2 k^4 + (\frac{15}{48})k^6 + \dots$$

H 8 (Taylorentwicklung und Integration).

Man zeige

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

und berechne damit das Integral bis auf einen Fehler von 10^{-8}.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 x^k(\ln(x))^k dx = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$.

Die Funktion $x^x = e^{x\ln(x)}$ *hat in* 0 *einen Grenzwert, kann also als stetig in* $[0,1]$ *angesehen werden. Mit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(x)$ *und* $f(0) = 0$, *gilt*

$$x^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f(x))^k}{k!}.$$

Da f *in* $[0,1]$ *beschränkt ist, konvergiert die Reihe normal in* $[0,1]$; *sie darf also gleidweise integriert werden. Der Hinweis liefert nun die Behauptung.*

Zur Berechnung der Reihe bis auf 10^{-8} *genau genügen wegen* $9^9 > 3,5 \cdot 10^8$ *nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen die ersten* 8 *Summanden: Damit ergibt sich*

$$\int_0^1 x^x dx = 0,78343051 + R, \quad |R| < 10^{-8}.$$