Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08
Übung 1, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 1 (Treppenfunktionen).

Man berechne die folgenden Integrale mit der Hilfe von Treppenfunktionen.

(a) $\int_0^a x^k dx$, $(k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}_+^*)$.
Hinweis: Dabei benutze man eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, a]$.
Es gilt $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + q_k n^k + ... + q_1 n$ für rationale Zahlen $q_1, ..., q_n$.

(b) $\int_1^a \frac{dx}{x}$, $(a > 1)$.
Hinweis: Man wähle für $n \in \mathbb{N}$ folgende Unterteilung: $x_i := a^{\frac{i}{n}},\ i = 0, ..., n$.

(a) Sei n eine positive natürliche Zahl und seien

$$x_i := \frac{ia}{n},\ i = 0, ..., n.$$

Wir konstruieren nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion ψ_n mit $x^k \leq \psi_n(x)$, $x \in [0, a]$: Es sei ψ_n die Treppenfunktion zur Zerlegung $Z_n = (x_0, ..., x_n)$ mit $\psi_n(x) = (x_i)^k$ für alle $x_{i-1} \leq x < x_i$. Das zugehörige Integral ist dann

$$S_n^* := \sum_{i=1}^n (\frac{ia}{n})^k \cdot \frac{a}{n} = (\frac{a}{n})^{k+1} \sum_{i=1}^n i^k.$$

Mit dem Hinweis folgt dann

$$S_n^* = a^{k+1}(\frac{1}{k+1} + \frac{q_k}{n} + ... + \frac{q_1}{n^k})$$

und folglich

$$\int_0^{*a} x^k \leq \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Ebenso konstruieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion φ_n mit $\varphi_n(x) \leq x^k$, $x \in [0, a]$: Es sei φ_n die Treppenfunktion zur Zerlegung $Z_n = (x_0, ..., x_n)$ mit $\psi_n(x) = (x_{i-1})^k$ für alle $x_{i-1} \leq x < x_i$. Das zugehörige Integral ist dann

$$S_{*n} := \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{ia}{n})^k \cdot \frac{a}{n} = (\frac{a}{n})^{k+1} \sum_{i=0}^{n-1} i^k.$$

Es folgt dann mit einem ähnlichen Argument wie oben, dass

$$\frac{a^{k+1}}{k+1} \leq \int_{*0}^{a} x^k.$$

Somit gilt $\int_0^{*a} x^k \leq \frac{a^{k+1}}{k+1} \leq \int_{*0}^a x^k$ und folglich $\int_{*0}^a x^k = \int_0^{*a} x^k = \int_0^a x^k = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

(b) *Sei n eine positive natürliche Zahl und seien*

$$x_i := a^{\frac{i}{n}}, \; i = 0, ..., n.$$

Wir kopieren nun die Schritte aus Teilaufgabe (a). Als Integral erhalten wir in diesem Fall

$$S_n^* := \sum_{i=1}^{n} a^{-\frac{i}{n}}(a^{\frac{i}{n}} - a^{\frac{i-1}{n}}) = n(a^{\frac{1}{n}} - 1).$$

und folglich erhalten wir

$$\int_1^{*a} \frac{1}{x} \leq \ln(a).$$

wegen

$$\lim_n \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a).$$

Die Untersumme liefert das gleiche Ergebnis (nachprüfen!), so dass

$$\int_{*1}^{a} \frac{1}{x} = \int_1^{*a} \frac{1}{x} = \int_1^{a} \frac{1}{x} = \ln(a).$$

G 2 (Integrale).

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$.

(b) $\int_0^1 a^{2x} dx$, $(a > 1)$.

(c) $\int_0^{\pi} e^{3\cos(2x)} \sin(2x) dx$.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 1$.

(b) $\int_0^1 a^{2x} dx = [\frac{1}{2\ln(a)} a^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2\ln(a)}(a^2 - 1)$.

(c) $\int_0^{\pi} e^{3\cos(2x)} \sin(2x) dx = [-\frac{e^{3\cos(2x)}}{6}]_0^{\pi} = 0$.

G 3 (Der Flächeninhalt des Kreises).

Eine Kreisscheibe mit Radius R besitzt den Flächeninhalt πR^2.

Wir können den Ursprung des (ebenen rechtwinkligen) Koordinatensystems in den Kreismittelpunkt legen. Dann wird die abgeschlossene Kreisscheibe K_R mit Radius R durch

$$K_R = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

beschrieben. Offensichtlich besteht K_R aus den beiden Halbkreisscheiben

$$H_R := \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

und $-H_R$, und

$$H_R \cap (-H_R) = [-R, R] \times \{0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | \, -R \leq x \leq R\}.$$

Da der obere Rand von H_R durch den Graphen der Funktion

$$[-R, R] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$$

beschrieben wird, wird der Flächeninhalt von H_R durch

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

gegeben. Hierbei ist es unwesentlich, ob die untere Berandung $[-R, R] \times \{0\}$ von H_R mit zu H_R gezählt wird oder nicht, da der Flächeninhalt eines Rechtecks der Breite 0 definitionsgemäß 0 ist. Aus Symmetriegründen ist der Flächeninhalt A_R des Kreises K_R gleich dem doppelten Inhalt des Halbkreises H_R. Folglich gilt

$$A_R = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Zur Bestimmung dieses Integrals ist es angebracht, Polarkoordinaten zu verwenden. Dazu setzen wir $x(\alpha) := R\cos(\alpha)$ für ein $\alpha \in [0, \pi]$. Berechne nun hiermit den Flächeninhalt des Kreises A_R.

$$A_R = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2(\alpha) d\alpha = 2R^2 \int_{0}^{\pi} \sin^2(\alpha) d\alpha.$$

Nun gilt

$$\int_0^\pi \sin^2(\alpha) d\alpha = \int_0^\pi \cos^2(\alpha) d\alpha = \int_0^\pi (1 - \sin^2)(\alpha) d\alpha$$

also folglich

$$\int_0^\pi \sin^2(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Kreises K_R ist daher $A_R = \pi R^2$.

Hausübung

H 1 (Nochmals Integrale).

Man berechne die folgenden (bestimmten) Integrale.

(a) $\int_0^1 x^{n-1} \sin(x^n) dx$, $(n \in \mathbb{N})$.

(b) $\int x^n \ln(x) dx$, $(n \in \mathbb{Z})$.

(a) *Mit der Substitution $y(x) := x^n$ folgt wegen $dy = nx^{n-1}dx$*

$$\int_0^1 x^{n-1} \sin(x^n) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \sin(y) dy = [-\frac{\cos(y)}{n}]_0^1 = \frac{1}{n}(1 - \cos 1).$$

(b) Sei $n \neq -1$. Dann gilt

$$\int x^n \ln(x)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}((n+1)\ln(x)-1)+c.$$

Im Fall $n = -1$ hat der Integrand die Stamfunktion $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

H 2 (Eigenschaften Riemann-integrabler Funktionen).

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrable Funktion mit $f \geq 0$ und

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Man zeige, dass $f(x_0) = 0$ an jeder Stetigkeitsstelle x_0 von f gilt.

Angenommen $f(x_0) > 0$ an einer Stetigkeitsstelle x_0 von f. Dann existiert ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ um x_0 mit $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ für $x \in [\alpha, \beta]$. (Definition der Stetigkeit!). Für die durch $\varphi(x) := \frac{1}{2}f(x_0)$ für $x \in [\alpha, \beta]$ und $\varphi(x) := 0$ für $x \in [a, b] - [\alpha, \beta]$ definierte Treppenfunktion gilt dann

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{(\beta-\alpha)}{2}f(x_0) > 0.$$

Widerspruch!

H 3 (Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Es sei $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, und $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ sei monoton. Dann gibt es ein $\zeta \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx + g(b)\int_\zeta^b f(x)dx.$$

Hinweis: Man setze $F(x) := \int_a^x f(s)ds$ und verwende partielle Integration.

Man beachte, dass $F(x) := \int_a^x f(s)ds$ stetig differenzierbar ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Funktion g monoton wachsend ist, d.h. $g' \geq 0$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung rechnet man dann:
$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx = g(b)F(b) - F(\zeta)\int_a^b g'(x)dx = g(b)(F(\zeta) + \int_\zeta^b f(x)dx) + F(\zeta)g(a) - F(\zeta)g(b) = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx + g(b)\int_\zeta^b f(x)dx.$

H 4 (Eine spezielle Riemann-integrable Funktion).

Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}, q \geq 1. \end{cases}$$

Man zeige, dass f Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Da $f \geq 0$, *genügt es zu zeigen, dass zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine Treppenfunktion* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$f \leq \varphi \text{ und } \int_0^1 \varphi(x)dx \leq \epsilon.$$

Sei dazu $\epsilon > 0$ *beliebig. Nach Definition von* F *gibt es nur endlich viele Stellen* $x_1, x_2, ..., x_m$ *mit* $f(x_i) > \frac{\epsilon}{2}$ *für* $i = 1, ..., m$

Die Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *werde dann wie folgt definiert:*

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \min_{i\in\{1,...,m\}} |x - x_i| \leq \frac{\epsilon}{4m} \\ \frac{\epsilon}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überlegt sich leicht, dass φ *eine Treppenfunktion ist. Es gilt*

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2} + m \cdot \frac{\epsilon}{2m} = \epsilon.$$