Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23./24. Jan. 2008

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 13

Gruppenübung

G 46 (Minimaler Abstand).

Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und a ein Punkt außerhalb M. Weiter sei $x_0 \in M$ ein Punkt minimalen Abstandes von a. Zeige, dass die Gerade durch a und x_0 senkrecht auf M steht, d.h., zeige, dass für alle $v \in T_{x_0}M$ $\langle v, a - x_0 \rangle = 0$ gilt.

G 47 (Eine bekannte Ungleichung).

(a) Bestimme das Maximum von

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_1 \cdots x_n$$

unter der Nebenbedingung

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \varphi(x) = x_1 + \ldots x_n = 1, x_i > 0\}$$

(b) Leite aus Aufgabenteil (a) die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel her, d.h., zeige für beliebige positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

G 48 (Test).

Es seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f, g : Q \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

(a) $\int_Q \big(af(x) + g(x)\big)dx = a \int_Q f(x)dx + \int_Q g(x)dx.$

(b) $\int_Q \frac{1}{f(x)}dx = \frac{1}{\int_Q f(x)dx}.$

(c) $\int_Q |f(x)|dx = |\int_Q f(x)dx|.$

(d) Seien nun $Q := [a, b]^2$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt dann

$$\int_Q f(x)f(y)dxdy = \big(\int_a^b f(x)dx\big)^2 \text{ ?}$$

G 49 (Integrale ausrechnen I).

Es sei $Q := [2, 5] \times [1, 4]$. Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_Q xy \, dxdy.$

(b) $\int_Q \frac{1}{x} \ln y \, dxdy.$

(c) $\int_Q a^2 y^2 e^x \, dxdy.$

Hausübung

H 52 (Integrale ausrechnen I).

Es sei $Q := [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$. Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_Q xyz\, dxdydz$.

(b) $\int_Q (x^2 + y^2 + z^2 - 1)\, dxdydz$.

(c) $\int_Q z \sin(2\pi x)\, dxdydz$.

H 53 (Ein Spezialfall der Hölderschen Ungleichung).

Beweise: Sei $f : [a,b] \to (0,\infty)$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\Big) \geq (b-a)^2.$$

Hinweis: Setze $Q := [a,b]^2$.

(a) Zeige zunächst die Identität

$$\int_Q g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \int_a^b h(y)dy$$

für alle stetigen Funktionen $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(b) Schließe hieraus für obige Funktion f

$$\int_Q \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \int_Q \frac{f(y)}{f(x)}dxdy =: I, \text{ also } I = \frac{1}{2}\int_a^b \Big(\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)}\Big)dxdy.$$

(c) Wende hierauf die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel an.

H 54 (Kegel).

(a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Wir definieren den Kegel über der Basis B durch

$$K(B) := \{\big((1-t)x, t\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1,\, x \in B\}.$$

Sind B und $K(B)$ Riemann-messbar, so gilt

$$\mu_{n+1}\big(K(B)\big) = \frac{1}{n+1}\mu_n(B).$$

(b) Sei $B := B_1(0)$. Bestimme mit Teilaufgabe (a) den Inhalt des Kegels $K(B)$.