Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16./17. Jan. 2008

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 12

Gruppenübung

G 42 (Zum warm werden).

Zeige: Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale C^∞- Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn M in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

G 43 (Kegel und Hyperboloide).

Es sei $c \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \;\; f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 - c.$$

Skizziere in Abhängigkeit von c die Mengen

$$H_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist H_c eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

G 44 (Cassinische Kurven).

In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die beiden Punkte $P_1 = (-e, 0)$ und $P_2 = (0, e)$, wobei $e > 0$ fest gewählt sei. Dann definieren wir für $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $c > 0$ die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; f(x, y) = r_1^2(P)r_2^2(P) - c^4,$$

wobei

$$r_1(P) := \overline{P_1P} = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}, \;\; r_2(P) := \overline{P_2P} = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

gesetzt seien. Die Niveaumengen

$$M_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, f(x, y) = 0\}$$

nennt man *Cassinische Kurven* (nach dem Astronomen Giovanni Domenico Cassini (1628-1712)). Für welche $c > 0$ ist M_c eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

G 45 (Konfigurationsräume).

Die Lage eines Systems von n Punkten im $\mathbb{R}^3$ ist durch deren $3n$ Koordinaten, zwischen denen bestimmte Relationen bestehen, charakterisiert. Zum Beispiel ist die Lage eines orientierten Stabes der Länge l gegben durch den Anfangspunkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ und den Endpunkt $y = (y_1, y_2, y_3)$, wobei

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 = l^2$$

gilt. Zeige: Die Menge aller solcher 6-Tupel (x, y) ist eine 5-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$.

Hausübung

H 48 (Die orthogonale Gruppe).

Zeige: Die orthogonale Gruppe $O(n) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | X^T X = E\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$. Die Matrix E steht hierbei für die Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Anleitung:

(a) Zeige: Die Menge $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | X = X^T\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Betrachte die Abbildung

$$f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad f(X) := X^T X.$$

Zeige, dass f stetig differenzierbar ist und $O(n) = f^{-1}(E)$ gilt.

(c) Zeige, dass das Differential $df(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ in $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ durch

$$df(A)H = A^T H + H^T A, \quad H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

gegeben ist.

(d) Zeige, dass E ein regulärer Wert von f ist, d.h., $df(A)$ ist für jede orthogonale Matrix A surjektiv. Zeige hierfür, dass die Gleichung $df(A)H = S$, $S \in \mathrm{Sym}_n \mathbb{R}$ eine Lösung besitzt.

(e) Folgere, dass $O(n) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | X^T X = E\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist.

H 49 (Der Tangentialraum der orthogonalen Gruppe $O(n)$).

Zeige: Der Tangentialraum der orthogonalen Gruppe $O(n)$ im Einselement E ist gegeben durch

$$T_E O(n) = \{H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | H + H^T = 0\}.$$

H 50 (Tangentialraum und affiner Tangentialraum einer Quadrik).

(a) Bestimme den Tangentialraum der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T A x = 1\}$ im Punkt $a \in Q$.

(b) Der affine Tangentialraum $T_a^{\mathrm{aff}} Q$ in $a \in Q$ besteht aus den Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $(x - a) \in T_a Q$. Zeige:

$$T_a^{\mathrm{aff}} Q = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T A x = 1\}.$$

H 51 (Extrema unter Nebenbedingungen).

Suche dasjenige Dreieck mit den Seiten x, y, z, welches bei gegebenem Umfang $2s$ den größten Flächeninhalt besitzt.

Hinweis: Das Quadrat des Flächeninhalts ist nach der *Heronschen Formel* gegeben durch den Ausdruck $f(x, y, z) = s(s-x)(s-y)(s-z)$.