Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19./20. Dez. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 10

Gruppenübung

G 34 (Zum warm werden).

Betrachte die Menge $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

(a) Mache dir klar, dass U nicht sternförmig ist.

(b) Finde alle möglichst kleinen Mengen $C \subsetneq U$, so dass $U \backslash C$ sternförmig ist.

G 35 (Zentralfelder).

Es sei $X = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, und für die Komponenten der Pfaffschen Form

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j dx_j$$

gelte die Darstellung

$$f_j(x) := x_j \varphi(||x||_2), \ \ 1 \leq j \leq n,$$

mit einer Funktion $\varphi \in C^q(0, \infty)$, $q \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeige: Die Pfaffsche Form α ist exakt.
Hinweis: Eine Stammfunktion f wird durch $f(x) := \Phi(||x||_2)$ gegeben mit

$$\Phi(r) := \int_{r_0}^{r} t\varphi(t)dt, \ \ r > 0,$$

wobei r_0 eine feste positive Zahl ist.

(b) Zeige: Das Zentralfeld

$$\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n, \ \ x \mapsto \frac{cx}{||x||_2^n}$$

mit $c \in \mathbb{R}^\times$ und $n \geq 2$ ist ein Gradientenfeld. Bestimme das zugehörige Potential.
Bemerkung: Das Zentralfeld spielt eine wichtige Rolle in der Physik, wo es je nach Kontext *Newtonsches* oder *Coulombsches Potential* heißt.

G 36 (Rotation eines Vektorfelds im $\mathbb{R}^3$).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Unter der Rotation der Feldes $F = (F_1, F_2, F_3)$ versteht man das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \ \ \text{symbolisch } \nabla \times F.$$

(a) Es sei $\omega_F := F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ die zu dem Vektorfeld assoziierte Pfaffsche Form. Zeige: Ist ω_F exakt, besitzt also eine Stammfunktion, so gilt $\operatorname{rot} F = 0$.

(b) Zeige: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{rot} F = 0$, so besitzt ω_F eine Stammfunktion.

Hinweis: Satz X.6.19.

(c) Betrachte das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \ (x, y, z) \mapsto (y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z, 2yz^3 \sin x, 3y^2 z^2 \sin x - x^4).$$

Zeige, dass ω_F exakt ist.

G 37 (Zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend).

Zeige, dass die Menge

$$M := \{(x, f(x)) \,|\, x \in]0, 1]\} \cup \{(0, y) \,|\, y \geq 0\}$$

für

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, \ \ \begin{cases} -2n^2(n+1)x + 2n(n+1), & \text{falls } \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n^2(n+1)x - 2n^2, & \text{falls } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}. \end{cases}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Hausübung

H 37 (Orthonormalbasen).

Es sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, \ \ \lambda_j \in \mathbb{R} \ \text{ für } \ 1 \leq j \leq n.$$

Zeige, dass $||v||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$ gilt.

H 38 (Zusammenhang).

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ zusammenhängend?

Bemerkung: Hier ist $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

H 39 (Vereinigung von zusammenhängenden Mengen).

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ zwei zusammenhängende Mengen Teilmengen mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeige, dass dann auch $A \cup B$ zusammenhängend ist.

Bemerkung: Die gleiche Behauptung gilt auch für eine beliebige Vereinigung zusammenhängender Teilmengen eines metrischen Raumes, solange je zwei solcher Teilmengen nicht disjunkt sind.

H 40 (Der Abschluss zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend).

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Zeige, dass dann auch $\overline{A}$ zusammenhängend ist.

H 41 (Zusammenhangskomponenten).

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Auf X definieren wir folgendermaßen eine Relation (vgl. Analysis I): Zwei Punkte $x, y \in X$ stehen zueinander in Relation, wenn sie in einer zusammenhängenden Menge liegen, oder formaler

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists U \subseteq X \text{ zusammenhängend} : x, y \in U.$$

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung: Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation nennt man *Zusammenhangskomponenten.*

(b) Zeige:

(i) Die Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängend und abgeschlossen.

(ii) Jede zusammenhängende Menge ist in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

(iii) Zusammenhangskomponenten sind entweder gleich oder disjunkt und Überdecken X.

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Zusammenhangskomponenten von U auch offen sind.

(d) Zeige, dass jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine disjunkte Vereinigung von Gebieten ist.

H 42 (Zur Interpretation der Rotation eines Vektorfeldes im $\mathbb{R}^2$).

Es sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^2$ und ω_F seine assoziierte Pfaffsche Form. Außerdem sei die Kurve

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \ \gamma_r(t) := (r\cos t, r\sin t)$$

gegeben. Man zeige:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \omega_F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0).$$

Weshalb bezeichnet man $\operatorname{rot} F(0)$ als die Rotation von F an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^2$?

H 43 (Integrierender Faktor).

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ω eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form auf U. Eine Funktion $h \in C^1(U)$ heißt *Eulerscher Faktor* oder *integrierender Faktor* für ω, falls $h \cdot \omega$ geschlossen ist und $h(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \in U$ gilt.

(a) Zeige: Ist $h \in C^1(u)$ mit $h(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \in U$, so ist h genau dann ein Eulerscher Multiplikator für $\omega = f dx + g dy$, wenn gilt

$$f\frac{\partial h}{\partial y} - g\frac{\partial h}{\partial x} + (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x})h = 0.$$

(b) Es seien $a, b, c, e > 0$ und $\omega = (c - ex)ydx + (a - by)xdy$.

Zeige, dass ω einen integrierenden Faktor der Form $h(x, y) = m(xy)$ auf $U =]0, \infty[\times]0, \infty[$ besitzt.

Hinweis: Man verwende Aufgabenteil (a), um eine Differentialgleichung für m herzuleiten, für die man eine Lösung erraten kann.

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!