Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12./13. Dez. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 9

Gruppenübung

G 30 (Kurvenintegrale und Stammfunktionen).

(a) Im $\mathbb{R}^3$ betrachte die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (e^{t \sin t}, t^2 - 2\pi t, \cos \frac{t}{2})$. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega_i$, $i = 1, 2$ für die Pfaffschen Formen

$$\omega_1 = xdx + ydy + zdz \text{ und } \omega_2 = zdy.$$

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetige Pfaffsche Form. Eine Funktion $F \in C^1(U)$ heißt Stammfunktion von ω, falls $dF = \omega$ gilt. Ist $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ stetig differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion.

Bestimme eine Stammfunktion der Pfaffschen Form

$$\omega = (2xy + z^3)dx + x^2 dy + 3xz^2 dz.$$

G 31 (Zusammenhang).

Überprüfe, ob folgende Mengen zusammenhängend sind:

(a) $X = [0, 1] \cup (2, 3)$.

(b) Die Hyperbel $H := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x_1^2 - x_2^2 = 1\}$.

(c) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.
Hinweis: Überlege dir zunächst, dass die Abbildung $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig ist.

G 32 (Zwischenwertsatz).

Beweise folgende Behauptung:

Es sei X ein zusammenhängender Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner seien a und b Punkte in X. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

G 33 (Wegzusammenhang).

Zeige: Für $n \geq 2$ sind $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und die Sphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \, ||x||_2 = 1\}$ wegzusammenhängend.

Hausübung

H 33 (Kurvenintegrale).

(a) Im $\mathbb{R}^2$ betrachte die Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := e^t(\cos t, \sin t)$. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ für die Pfaffsche Form $\omega := xdy - ydx$.

(b) Seien $r, c > 0$ und γ die Schraubenlinie

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) := (r\cos t, r\sin t, ct).$$

Berechne das Kurvenintegrale $\int_\gamma \omega$ für die Pfaffsche Form

$$\omega = (x^2 - y^2)dx + 3zdy + 4xydz.$$

H 34 (Stammfunktionen).

Bestimme Stammfunktionen der folgenden Pfaffschen Formen:

(a) $\omega = (2x - y)dx - xdy \in \Omega(\mathbb{R}^2)$.

(b) $\omega = (x^2y^3 + 2xy)dx + (2x^3y^2 + x^2)dy \in \Omega(\mathbb{R}^2)$.

(c) $\omega = (y^2z^3\cos x - 4x^3z)dx + 2yz^3\sin x dy + (3y^2z^2\sin x - x^4)dz \in \Omega(\mathbb{R}^3)$.

H 35 (Zusammenhang als topologische Invariante).

Der Zusammenhang stellt eine wichtige topologische Invariante dar. Zeige:

(a) Sind X und Y homöomorphe Räume, d.h. existiert eine stetige, bijektive Abbildung $f : X \to Y$ mit stetiger Umkehrfunktion, so ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

(b) $\mathbb{R}^n$ ist für $n > 1$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

H 36 (Eine Anwendung).

Zeige: Zu jeder stetigen Funktion $f : S^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, gibt es ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beispiel: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, in denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.

Hinweis: Zwischenwertsatz.