Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5./6. Dez. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 8

Gruppenübung

G 26 (Zum warm werden etwas Kombinatorik).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^\infty(U)$. Die zugehörige Taylorreihe bei $u \in U$ ist gegeben durch

$$T_u^\infty(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(u)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Wieviele verschiedene Monome enthält der Term

$$P_k := \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(u)}{\alpha!} x^\alpha?$$

G 27 (Taylorpolynome).

(a) Berechne das Taylorpolynom $T_0^4(f)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) := xyz \sin(x + y + z)$$

mit Hilfe von Satz X.3.8.

(b) Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (e^x, \sin y)\ \text{ und }\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}.$$

Sei $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechne das Taylorpolynom $T_0^2(h)$ auf zwei verschiedene Arten.

G 28 (Lokale Extrema).

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

G 29 (Eine Anwendung).

Beweise:

Für N Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein Minimum x_0 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := ||x - a_1||_2^2 + ||x - a_2||_2^2 + \ldots + ||x - a_N||_2^2.$$

Interpretiere zunächst den Fall $n = 2$. Welchen Wert x_0 erwartet man hier?

Hausübung

H 29 (Konvergenz der Taylorreihe).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Es gebe Konstanten $M, r > 0$, so dass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und für alle $x \in B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0||_1 < r\}$ die Abschätzung

$$|D^\alpha f(x)| \leq s! M r^{-s} \text{ für } |\alpha| = s$$

gilt. Dann ist die Taylorreihe

$$T_u^\infty(f)(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

für jedes $\rho \in (0, r)$ auf der Menge $B_\rho(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0||_1 < \rho\}$ absolut und gleichmäßig konvergent und erfüllt dort

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Hinweis: Es gilt der Multinomialsatz

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

H 30 (Extremwertaufgabe).

Konstruiere dasjenige Dreieck, für welches das Produkt der Sinuswerte der Winkel am größten ausfällt.

H 31 (Bifurkation).

Bestimme die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2$$

in Abhängigkeit von $\lambda > 0$.

Bemerkung: Die Aufgabe hat es in sich. Gehe sorgfältig vor!

H 32 (Kritische Punkte eines Quotienten).

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f, g \in C^1(U)$ und $g(x) \neq 0$.

(a) Zeige: $\nabla F(x) = 0$ ist äquivalent zu $\nabla f(x) = F(x) \cdot \nabla g(x)$.

(b) Als Beispiel betrachte den sogenannten *Rayleigh-Quotient*:

$$R : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ R(x) = \frac{x^T A x}{||x||_2^2}$$

für eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Bestimme eine Gleichung für die kritischen Punkte von R.

Bemerkung: Der Quotient ist benannt nach dem englischen Physiker *John William Strutt*, dritter *Baron Rayleigh* (1842-1908, Professor in Cambridge und London, 1904 Nobelpreis für Physik, 1905-1908 Präsident der Royal Society) und spielt in der Theorie der Eigenwerte eine wichtige Rolle.