Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28./29.Nov. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 7

Gruppenübung

G 22 (Veranschaulichen von Funktionen).

Veranschauliche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ mit Hilfe von Höhenlinien.

G 23 (Differenzierbarkeit und Taylorpolynome).

(a) Sei $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Zeige, dass dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) (i) Bestimme das Taylorpolynom 2.Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^y.$$

im Punkt $(1, 1)$.

(ii) Bestimme das Taylorpolynom 4.Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) := xyz \sin(x + y + z)$$

im Punkt $(0, 0, 0)$.

G 24 (Jacobi-Matrizen und Kettenregel).

(a) Berechne die Jacobi-Matrizen der Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ xy^2 \end{pmatrix}, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos(xyz) \end{pmatrix}.$$

(b) Berechne die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf zwei verschiedene Arten.

G 25 (Jacobi-Matrix).

Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Abbildung F wird oft in der Physik verwendet und als Kugelkoordinaten-Transformation bezeichnet.

Hausübung

H 25 (Differenzierbarkeit).

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := 3x^2y + 2xy^2 + e^z$.

(a) Berechne die partiellen Ableitungen von f.

(b) Prüfe nach, ob f total differenzierbar ist und gib gegebenenfalls die Jacobi-Matrix $J_p(f)$ im Punkt $p = (2,1,0)$ an.

(c) Berechne näherungsweise $f(2.1, 0.8, 0.15)$ mit Hilfe der linearen Approximation und vergleiche den Wert mit dem exakten Funktionswert.

H 26 (Kettenregel).

Beweise ausgehend von der Kettenregel aus der Vorlesung die folgende Aussage: Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und V eine offene Teilmenge von .$\mathbb{R}^n$. Außerdem seien Funktionen $g : U \to V$ und $f : V \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Die Funktion g sei in $a \in U$ differenzierbar, die Funktion f sei in $g(a)$ differenzierbar. Zeige, dass dann gilt

$$\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_l}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_l}(a) \quad 1 \le i \le k,\ 1 \le l \le m.$$

Bemerkung: Mit dieser Fundamentalen Formel werden partielle Ableitungen zusammengesetzter Funktionen in konkreten Fällen berechnet.

H 27 (Jacobi-Matrizen und Richtungsableitungen).

(a) Berechne die Jacobi-Matrizen der Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \\ e^{xy} \end{pmatrix}, \quad g : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, z \neq 0 \right\} \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{xe^y}{z}.$$

(b) Berechne die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne die Richtungsableitungen der Funktionen

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(xy), \ \text{ bzw. } \ k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto e^{xyz},$$

an der Stelle $(1,1)^t$ in Richtung $(1,1)^t$ bzw. an der Stelle $(1,1,1)^t$ in Richtung $(1,2,1)^t$. Die Operation t steht hierbei für das Transponieren eines Vektors.

H 28 (Polarkoordinaten).

Die Funktion $g :]0,\infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ führt Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten über.

(a) Veranschauliche die Funktion g.

(b) Berechne $\frac{\partial}{\partial\varphi}(f \circ g)$ und $\frac{\partial}{\partial r}(f \circ g)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion bezeichnet.

(c) Was bedeutet $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial r}$ anschaulich?

(d) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Berechne $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h \circ g)$ und $\frac{\partial}{\partial r}(h \circ g)$ auf zwei verschiedene Arten.