Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21./22.Nov. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 6

Gruppenübung

G 18 (Bogenlängen von Kurven I).

Seien $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $r > 0$. Man berechne die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3,\ f(t) := (r \cos t, r \sin t, ct).$$

G 19 (Bogenlänge von Kurven II).

Sei $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) := (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t).$$

Die Kurve γ heißt *logarithmische Spirale.*

(a) Skizziere die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

(b) Für $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $\gamma_{|[a,b]}$. Berechne $L_{a,b}$.

(c) Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$?

G 20 (Rechenregel für das Ableiten des Vektorprodukt).

Auf dem mit dem Standard-Skalarprodukt versehenen $\mathbb{R}^3$ definiert man für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

(a) Zeige, dass $a \times b$ senkrecht auf a und b steht.

(b) Zeige: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Interval und sind $a, b : D \to \mathbb{R}^3$ auf ganz D differenzierbare Funktionen, so gilt:

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \dot{a} \times b + a \times \dot{b}.$$

G 21 (Geometrie der Planetenbewegung).

Die Bewegung eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne wird nach der Newtonschen Mechanik durch eine Kurve $x : D \to \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ modelliert, die der Gleichung

$$m\ddot{x} = -\gamma Mm \frac{x}{||x||^3},$$

genügt. Hierbei steht γ für die Gravitationskonstante, M für die Masse der Sonne und m für die Masse des Planeten. Die Sonne liegt hierbei im Koordinatenursprung.

Die Diskussion einer Lösungskurve beruht auf den folgenden physikalischen Größen:

(1) $J := x \times m\dot{x}$, dem Drehimpulsvektor und

(2) $A := \frac{1}{\gamma M m} J \times \dot{x} + \frac{x}{||x||}$, dem Achsenvektor.

Zeige die zeitliche Konstanz von J und A.

Hinweis: Nutze bei (2) die sogenannte *Graßmann-Identität*:

$$(a \times b) \times c = -\langle b, c\rangle a + \langle a, c\rangle b.$$

Hausübung

H 21 (Zykloide).

Ein Rad mit Radius r rolle auf der x-Achse; hierbei bewege sich der Mittelpunkt M des Rades mit konstanter Geschwindigkeit v. Ferner sei P ein fester Punkt auf der Radperipherie, und P befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt.

(a) Bestimme die Bahnkurve $R(t)$ von P mit der Zeit t als Parameter.

(b) Bestimme das Maximum und das Minimum des Betrags $||R'(t)||$ der Geschwindigkeit $R'(t)$ von P.

H 22 (Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung).

Sei $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar und $f : X \to \mathbb{R}^k$ eine Funktion, für die die Komposition $f \circ \gamma$ integrabel ist. Zeige, dass das Integral $\int_\gamma f$ von der Parametrisierung von γ unabhängig ist.

H 23 (Differenzierbarkeit).

Überprüfe die Differenzierbarkeit folgender Funktionen und gib an den differenzierbaren Stellen das zugehörige Differential an:

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^T A x$ für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2$.

H 24 (Differzierbarkeit und Kettenregel).

Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, U eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$, differenzierbar.

(a) Sei $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung, d.h. $g(x) = Ax + b$ für $b \in \mathbb{R}^n$. Für welche $x \in \mathbb{R}^k$ ist die Abbildung $F := f \circ g$ differenzierbar? Gib an den differenzierbaren Stellen das zugehörige Differential an.

(b) Sei $\gamma : D \to U$ eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist und gib den Tangentialvektor an der Stelle $t_0 \in D$ an.