Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14./15.Nov. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 5

Gruppenübung

G 15 (Die 2-dimensionale Drehgruppe).

In Analysis I haben wir den Begriff der *Gruppe* kennengelernt. Zur Erinnerung: Eine Menge G zusammen mit einer binären Operation (auch Multiplikation genannt)

$$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x * y$$

heißt *Gruppe*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(A) *Assoziativgesetz*: $(\forall x, y, z \in G)\ \ x * (y * z) = (x * y) * z$;

(N) *Neutrales Element*: $(\exists e \in G)\ (\forall x \in G)\ \ e * x = x * e = x$;

(I) *Existenz eines Inversen*: $(\forall x \in G)\ (\exists y \in G)\ \ x * y = y * x = e$.

Im folgenden sind wir an der sogenannten 2-dimensionalen Drehgruppe

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

interessiert. Die Multiplikation ist hierbei durch die gewöhnliche Matrixmultiplikation in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ gegeben.

(a) Weise nach, dass es sich bei $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ wirklich um eine Gruppe handelt. Dabei kannst du auf den Nachweis der Assoziativität verzichten, da sich diese direkt von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vererbt. Wieso wird $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ Drehgruppe genannt?

(b) Mache dir kurz klar, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

bijektiv ist und durch $||A|| := ||\Phi(A)||_\infty$ eine Norm auf $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ definiert wird. Hiermit wird $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), ||\cdot||)$ zu einem normierten Raum.
Zeige, dass eine Abbildung $f : V \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ von einem normierten Raum V nach $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ genau dann stetig ist, wenn alle Komponentenfunktionen

$$f_i : V \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4$$

stetig sind.

(c) Zeige, dass die sogenannte Transposition

$$T : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto X^T := \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

stetig ist. Schließe hiervon auf die Stetigkeit der Inversion

$$\iota : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}.$$

(d) Zeige, dass die gewöhnliche Matrizenmultiplikation

$$m : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ (A,B) \mapsto A \cdot B$$

stetig ist. Schließe dann, dass auch die Gruppenmultiplikation

$$m : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ (A,B) \mapsto A \cdot B$$

stetig ist.

(e) Zeige, dass $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kompakt ist.
Hinweis: Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, betrachte die Funktion

$$f : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R},\ A \mapsto (A \cdot A^T - E, \det(A)).$$

Hierbei steht E für die Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und $\det : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ für die Determinantenfunktion. Überlege dir kurz, dass die Funktion f stetig ist. Zeige anschließend, dass $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = f^{-1}((0,1))$ gilt.

Bemerkung: Eine Gruppe, die zugleich ein metrischer (oder allg. topologischer) Raum ist, so dass Multiplikation und Inversion stetige Abbildungen sind, bezeichnet man auch als *topologische Gruppe*. Wir haben uns also davon überzeugt, dass $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ eine kompakte topologische Gruppe ist.

G 16 (Stetigkeit der Umkehrfunktion).

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zusätzlich sei X kompakt.
Beweise: Ist die Funktion $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

G 17 (Richtungsgrenzwert und Stetigkeit).

Bestimme (im Falle der Existenz) die Richtungsgrenzwerte der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$:

(a) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$

(b) $f(x,y) := \begin{cases} |\frac{y}{x^2}| \cdot e^{-|\frac{y}{x^2}|} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Hausübung

H 17 (Lösungsmengen von Ungleichungen).

Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $r \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Die Mengen $\{x \in X |\ f(x) < r\}$ und $\{x \in X |\ f(x) > r\}$ sind offen in X.

(b) Die Mengen $\{x \in X |\ f(x) \leq r\}$ und $\{x \in X |\ f(x) \geq r\}$ sind abgeschlossen in X.

H 18 (Satz vom Maximum).

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $C_0(\mathbb{R}^n)$ den Raum der „im Unendlichen verschwindenden“ stetigen Funktionen, d.h. es handelt sich um diejenigen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n |\ |f(x)| \geq \epsilon\}$ kompakt ist.

(a) Zeige: Jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ besitzt ein Maximum.

(b) Es sei K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$. Weise nach, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + d_K(x)},$$

in $C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt, wobei d_K die Abstandsfunktion bezeichnet. Wo liegt das Maximum der Funktion?

H 19 (Stetigkeit linearer Abbildung).

Satz IX.4.12 liefert vier äquivalente Bedingungen für die Stetigkeit einer linearen Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen.
Beweise: Eine linearen Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen ist stetig genau dann, wenn sie Cauchy-Folgen in V auf Cauchy-Folgen in W abbildet.

H 20 (Operatornorm).

Berechne die Operatornormen der folgenden linearen Abbildungen:

(a) $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$, $x \mapsto Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$, $x \mapsto Bx$ für $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x \mapsto Cx$ für $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(d) $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x \mapsto Cx$ für $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.