Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7./8.Nov. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 4

Gruppenübung

G 11 (Innere Punkte, Abschluss und Rand I).

Bestimme jeweils die inneren Punkte, den Abschluss und den Rand der folgenden Mengen:

(a) $M := \{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$;

(b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;

(c) $B = \{v \in V | \, ||v|| \leq 1\} \subseteq V$, für einen normierten Raum $(V, || \cdot ||)$.

G 12 (Etwas Topologie).

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und A, B Teilmengen von X. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$;

(b) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Gilt hier i.A. auch Gleichheit?

G 13 (Heine-Borel).

Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ gebe es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert. Zeige, dass in diesem Fall A kompakt ist.

G 14 (Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft).

Zeige mit Hilfe der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft, dass das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ kompakt ist.

Anleitung: Es sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von I. Setze

$$S := \{s \in I | \, [0, s] \text{ wird von einer endlichen Teilüberdeckung von } (U_j)_{j\in J} \text{ überdeckt}\}.$$

Zeige, dass für $b = \sup(S)$ gilt:

(a) $S = [0, b)$ oder $S = [0, b]$.

(b) Führe den Fall $S = [0, b)$ zu einem Widerspruch. Es gilt also $S = [0, b]$.

(c) Führe den Fall $b < 1$ erneut zu einem Widerspruch.

Hausübung

H 13 (Minimaler Abstand zu einer Menge).

Es sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Man definiert die sogenannte Abstandsfunktion durch

$$d_A(z) := \inf_{a \in A} \{|z - a|\}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Mache dir klar, dass man $d_A(z)$ zu Recht als Abstand von z und A bezeichnet. Zeige dann:

(a) Ist A abgeschlossen, so gibt es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ einen Punkt $a \in A$ mit $d_A(z) = |z - a|$. Gib eine nicht abgeschlossene Menge an, bei der die Behauptung falsch ist.

(b) Die Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit der Nullstellenmenge $\{z \in \mathbb{C} | \, d_A(z) = 0\}$ von d_A übereinstimmt.

H 14 (Kompaktheit und Vollständigkeit).

Beweise: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

H 15 (Stetige Funktionen mehrerer Variablen).

Sind folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(0, 0)$ stetig?

(a) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$

(b) $f(x, y) := \begin{cases} |\frac{y}{x^2}| \cdot e^{-|\frac{y}{x^2}|} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

H 16 (Heine-Borel gilt nicht immer!).

In dieser Aufgabe geben wir ein Beispiel dafür, dass im allgemeinen aus „abgeschlossen“ und „beschränkt“ nicht „kompakt“ folgt. Sei $B(\mathbb{N}) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \, ||f||_{\mathbb{N}} \leq \infty\}$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{N}$. In Analysis I haben wir uns klar gemacht, dass $B(\mathbb{N})$ ein normierter Raum ist (vgl. Satz IV.2.4).

(a) Weise nach, dass die Einheitskugel $S := \{f \in B(\mathbb{N}) | \, ||f||_{\mathbb{N}} \leq 1\}$ abgeschlossen und beschränkt ist.

(b) Sei $\delta_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$ die Funktion gegeben durch $\delta_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Zeige: $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge.

(Beachte: $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von Funktionen!)