Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

31.Okt./1.Nov. 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 3

Gruppenübung

G 8 (Komponentenweise Konvergenz I).

Untersuche die nachstehenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(a) $x_n = (\frac{1}{n}, 0, (-1)^n \frac{1}{n})$;

(b) $x_n = (\frac{(n+5)^{19}}{(n^2+3n+1)^{11}}, (1+\frac{1}{n})^n, 1-\frac{7}{m})$;

(c) $x_n = (\frac{i^n}{n}, (-1)^n - (-1)^{n+1})$;

(d) $x_n = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

G 9 (Abschätzungen).

Es seien $m, p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{K}^m$. Zeige die Gültigkeit der folgenden Behauptungen:

(a) $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{m}||x||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$.

(b) $\lim_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

G 10 (Geometrie der Einheitskugel).

Es sei $X = \mathbb{R}^2$.

(a) Skizziere die Einheitskugeln bezüglich der Normen $||x||_1, ||x||_2$ und $||x||_\infty$.

(b) Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ heißt *konvex*, falls

$$tx + (1-t)y \in K$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $x, y \in K$. Skizziere einige Beispiele konvexer Mengen in $\mathbb{R}^2$. Wie lässt sich die Eigenschaft der Konvexität geometrisch interpretieren? Zeige, dass die Einheitskugeln aus Teilaufgabe (a) konvex sind.

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $i \in \{1, 2, \infty\}$ betrachte die Mengen

$$S_i(x,y) := \{z \in \mathbb{R}^2 |\ ||x-z||_i = ||y-z||_i = \frac{||x-y||_i}{2}\}$$

Was fällt dir hierbei auf?

G 11 (Konvexe Funktionen).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) Zeige zunächst durch Rechnung: Ist f affin, d.h. existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = cx + d$ für alle $x \in D$, so ist f sowohl konvex als auch konkav.

(b) Warum folgt dies aus der geometrischen Interpretation der Konvexität?

(c) Ist f konvex und konkav, so ist f affin.

(d) Die Funktion f ist genau dann affin, wenn für alle $a, b \in D$ und alle $0 < \lambda < 1$ gilt:
$$f((1-\lambda)a + \lambda b) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

(e) Sind f_1 und f_2 konvex, so ist $f_1 + f_2$ konvex.

(f) Ist f konvex und $\lambda \geq 0$, so ist λf konvex.

Hausübung

H 9 (Komponentenweise Konvergenz II).

Untersuche die nachstehenden Folgen $(x_n)_{\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(a) $x_n = (\frac{2^n}{n!}, \frac{\sin(n)}{n}, n \cdot \tan(\frac{1}{n}))$;

(b) $x_n = (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k \cdot k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k})$;

H 10 (Eine interessante Metrik auf $\mathbb{R}$).

Man betrachte die Funktion $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$\delta(x, y) := \arctan |x - y|.$$
Man zeige, dass δ die Axiome einer Metrik erfüllt.

H 11 (Metrische Räume sind hausdorffsch).

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, es gilt das „Hausdorffsche Trennungsaxiom“: Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es disjunkte Umgebungen U von x und V von y, d.h. es gilt $U \cap V = \emptyset$.

H 12 (Abgeschlossene Mengen).

Zeige: Sind $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen, so ist auch $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ abgeschlossen.

Hinweis: Sei $(x, y) \notin A \times B$. Zeige, dass das Komplement von $A \times B$ offen ist, d.h. es gibt $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon((x, y)) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \backslash (A \times B)$.

Insbesondere folgt hieraus, dass die Quader
$$Q := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \, a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } i = 1, ..., n\},$$
$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ sind.