Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

25. Oktober 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 2

Gruppenübung

G 4 (Zum warm werden).

Begründe die von Physikern beliebten Näherungen $\sin(x) \approx x$, $\cos(x) \approx 1$ und $\tan(x) \approx x$ für „kleine“ $x \in \mathbb{R}$.

G 5 (Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens).

Nach Albert Einstein beträgt die Gesamtenergie eines Teilchens der Masse m

$$E = mc^2.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Die Masse ist jedoch von der Geschwindigkeit v des Teilchens abhängig; es gilt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}.$$

Hier ist m_0 die Ruhemasse des Teilchens; die Ruheenergie ist demnach $E_0 = m_0 c^2$. Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{\text{kin}} = E - E_0.$$

Berechne mit Hilfe der binomischen Reihe die kinetische Energie E_{kin}. Kommt dir der erste Term der berechneten Reihe bekannt vor?

G 6 (Taylorentwicklung).

Durch Integration der Taylorreihe der Ableitung von $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ bestimme man die Taylorreihe der Funktion arcsin mit Entwicklungspunkt 0.

G 7 (Cauchys Beispiel).

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Berechne die zugehörige Taylorreihe von f an der Stelle 0. Auf welcher Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist $T_0^\infty(f)$ konvergent? Auf welcher Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}$ gilt $f = T_0^\infty(f)$.

Hausübung

H 5 (Vertauschung von Limes und Integration I).

Es sei $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in [0, \infty)$.

(a) Für welche $x \in [0, \infty)$ konvergiert $f_n(x)$ punktweise gegen eine Funktion $f(x)$?. Bestimme $f(x)$ für diese $x \in [0, \infty)$.

(b) Ist die Konvergenz gleichmässig?

Hinweis: Betrachte die Maxima von f_n.

(c) Gilt

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx?$$

H 6 (Vertauschung von Limes und Integration II).

Es sei $f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$ für $x \in [0, \infty)$.

Man zeige, dass die Folge $(f_n)_n$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, aber

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx > 0.$$

Ist dies ein Widerspruch zu Satz VI.3.2?

H 7 (Ein elliptisches Integral).

Das besonders oft auftretende Integral

$$K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}}, \quad |k| < 1$$

wird auch (vollständiges) elliptisches Integral 1.Gattung genannt.

Elliptische Integrale treten in zahlreichen Anwendungen auf, zum Beispiel bei der Behandlung des mathematischen Pendels. Die Bezeichnung elliptisches Integral hat ihren Ursprung in der Berechnung der Bogenlänge der Ellipse.

Man entwickle $K(k)$ in eine Potenzreihe nach k. Für welche $k \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Hinweis: Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{(2n-1)}{2n} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

H 8 (Taylorentwicklung und Integration).

Man zeige

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots$$

und berechne damit das Integral bis auf einen Fehler von 10^{-8}.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 x^k (\ln(x))^k dx = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$.