Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18. Oktober 2007

Analysis II für M, LaG und Ph, WS07/08 , Übung 1

Gruppenübung

G 1 (Treppenfunktionen).

Man berechne die folgenden Integrale mit der Hilfe von Treppenfunktionen.

(a) $\int_0^a x^k dx$, $(k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}_+^*)$.
Hinweis: Dabei benutze man eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, a]$.
Es gilt $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + q_k n^k + ... + q_1 n$ für rationale Zahlen $q_1, ..., q_n$.

(b) $\int_1^a \frac{dx}{x}$, $(a > 1)$.
Hinweis: Man wähle für $n \in \mathbb{N}$ folgende Unterteilung: $x_i := a^{\frac{i}{n}},\ i = 0, ..., n$.

G 2 (Integrale).

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$.

(b) $\int_0^1 a^{2x} dx$, $(a > 1)$.

(c) $\int_0^\pi e^{3\cos(2x)} \sin(2x) dx$.

G 3 (Der Flächeninhalt des Kreises).

Eine Kreisscheibe mit Radius R besitzt den Flächeninhalt πR^2.

Wir können den Ursprung des (ebenen rechtwinkligen) Koordinatensystems in den Kreismittelpunkt legen. Dann wird die abgeschlossene Kreisscheibe K_R mit Radius R durch

$$K_R = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

beschrieben. Offensichtlich besteht K_R aus den beiden Halbkreisscheiben

$$H_R := \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

und $-H_R$, und

$$H_R \cap (-H_R) = [-R, R] \times \{0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | -R \leq x \leq R\}.$$

Da der obere Rand von H_R durch den Graphen der Funktion

$$[-R, R] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$$

beschrieben wird, wird der Flächeninhalt von H_R durch

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

gegeben. Hierbei ist es unwesentlich, ob die untere Berandung $[-R, R] \times \{0\}$ von H_R mit zu H_R gezählt wird oder nicht, da der Flächeninhalt eines Rechtecks der Breite 0 definitionsgemäß 0 ist. Aus Symmetriegründen ist der Flächeninhalt A_R des Kreises K_R gleich dem doppelten Inhalt des Halbkreises H_R. Folglich gilt

$$A_R = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Zur Bestimmung dieses Integrals ist es angebracht, Polarkoordinaten zu verwenden. Dazu setzen wir $x(\alpha) := R \cos(\alpha)$ für ein $\alpha \in [0, \pi]$. Berechne nun hiermit den Flächeninhalt des Kreises A_R.

Hausübung

H 1 (Nochmals Integrale).

Man berechne die folgenden (bestimmten) Integrale.

(a) $\int_0^1 x^{n-1} \sin(x^n) dx$, $(n \in \mathbb{N})$.

(b) $\int x^n \ln(x) dx$, $(n \in \mathbb{Z})$.

H 2 (Eigenschaften Riemann-integrabler Funktionen).

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrable Funktion mit $f \geq 0$ und

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Man zeige, dass $f(x_0) = 0$ an jeder Stetigkeitsstelle x_0 von f gilt.

H 3 (Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Es sei $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, und $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ sei monoton. Dann gibt es ein $\zeta \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^\zeta f(x) dx + g(b) \int_\zeta^b f(x) dx.$$

Hinweis: Man setze $F(x) := \int_a^x f(s) ds$ und verwende partielle Integration.

H 4 (Eine spezielle Riemann-integrable Funktion).

Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}, q \geq 1. \end{cases}$$

Man zeige, dass f Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$