Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21. Januar 2008

12. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Die Oberfläche von Rotationskörpern

Zu einer stetig differenzierbaren nichtnegativen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ erhält man die zu f gehörende Rotationsfläche $R_f \subseteq \mathbb{R}^3$, indem man den Graphen von f um die x-Achse rotieren lässt:

$$R_f := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \colon y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Wir definieren die Oberfläche von R_f durch

$$(*) \qquad F(R_f) := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Wir wollen versuchen, diese Formel geometrisch zu motivieren. Dazu werden wir R_f durch immer feinere Vereinigungen von Kegelstümpfen approximieren.
Zuerst müssen wir dazu verstehen, wie man die Oberfläche eines Kegelmantels berechnet. Das entspricht dem Fall, dass f eine affine Funktion ist $f(x) = ax + b$.

Aufgabe 1. Machen Sie sich klar, dass man einen Kreiskegel wie folgt basteln kann, Man beginne mit einer ebenen Kreisscheibe aus Papier vom Radius R und Mittelpunkt M. Man entferne nun einen Kreissektor mit dem Öffnungswinkel $2\pi - \alpha \in]0, 2\pi[$ in M und biege das verbleibende Papier so zusammen, dass sich die beiden gleichlangen Kanten, die durch das Entfernen des Sektors entstanden sind, berühren. ■

Aufgabe 2. Wir bestimmen nun die metrischen Größen des Kegels, den wir in Aufgabe 1 gebastelt haben. Es ist eine Kreiskegel, dessen äußere Seite die Länge $\ell := R$ besitzt und dessen Basis eine Kreisscheibe ist.
(a) Der Umfang des Basiskreises ist αR, der Radius ist also

$$r = \frac{\alpha}{2\pi} R.$$

(b) Die Höhe des Kreiskegels ist

$$h := \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}.$$

(c) Die Mantelfläche des Kegels ist

$$M = \frac{\alpha R^2}{2}. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 3. Zeige, dass die Fläche des Mantels eines Kreiskegel der Höhe h, dessen Basis den Radius r besitzt, durch

$$M = \pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r\ell \quad \text{für} \quad \ell := \sqrt{h^2+r^2},$$

gegeben ist. Hierbei ist ℓ die Länge der Kegelseite (von Spitze zum unteren Rand). $\blacksquare$

Aufgabe 4. Zeige, dass die Fläche des Mantels eines Kreiskegelstumpfes der Höhe h, dessen Deckel den Radius r_1 und dessen Basis den Radius r_2 besitzt, durch

$$M = \pi\ell(r_1+r_2) \quad \text{für} \quad \ell := \sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2},$$

gegeben ist. Hierbei ist ℓ die Länge der schrägen Kegelseite. Hinweis: Betrachte den Fall $r_1 = r_2$ getrennt. Für $r_1 < r_2$ setze $c := \frac{r_1}{r_2}$. Für die Seitenlängen ℓ_1 und ℓ_2 der beiden vollständigen Kegel gilt dann $\ell_2 r_2 - \ell_1 r_1 = \ell(r_1+r_2)$. $\blacksquare$

Aufgabe 5. Zeige, dass die Formel $(*)$ für den Fall, dass $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ affin ist mit $f(a) = r_1$ und $f(b) = r_2$, genau die Mantelfläche des Kegelstumpfs R_f liefert. Hinweis: f' ist konstant und für eine affine Funktion f ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 6. Sei nun $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ eine C^1-Funktion. Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $g_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise konstanter Funktionen, die gleichmäßig gegen f' konvergiert. Wir setzen nun $f_n(x) := f(a) + \int_a^x g_n(t)\,dt$. Zeigen Sie weiter, dass $f_n\sqrt{1+(f_n')^2}$ gleichmässig gegen $f\sqrt{1+(f')^2}$ konvergiert[1]. Insbesondere gilt dann

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\sqrt{1+(f_n'(x))^2}\,dx.$$

Warum ist das eine Rechtfertigung der Formel $(*)$? $\blacksquare$

[1] Beachte: $|\sqrt{1+c^2} - \sqrt{1+d^2}| \leq |c^2-d^2| = (c+d)|c-d|$.