Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14. Januar 2008

11. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Parametrisierte Untermannigfaltigkeiten

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und

$$f: U \to \mathbb{R}^n$$

eine C^1-Abbildung, für die in jedem Punkt $p \in U$ die Abbildung $\mathtt{d}f(p): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist, so nennen wir f eine *Immersion*. Ist f zusätzlich injektiv, so heißt das Paar $(f, f(U))$ eine *parametrisierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^n$.
Wir betrachten zuerst den Fall affiner Abbildungen.

Aufgabe 1. Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k$ und

$$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) := v_0 + \sum_{j=1}^{k} x_j v_j.$$

Unter welchen Bedingungen ist f injektiv bzw. eine Immersion? Beschreiben Sie das Bild von f. ■

Aufgabe 2. Wie findet man zu einem affinen Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension k eine Abbildung $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, so dass (f, A) eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist? ■

Jetzt noch einen kurzen Blick auf den eindimensionalen Fall:

Aufgabe 3. Unter welcher Bedingung ist eine C^1-Kurve $\gamma:]a, b[\to \mathbb{R}^n$ eine Immersion? ■

Aufgabe 4. Existiert zur Neilschen Parabel

$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$$

eine C^1-Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass (f, N) eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist? ■

Aufgabe 5. (Funktionsgraphen) Sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, eine C^1-Funktion. Finden Sie eine C^1-Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^{k+m}$, so dass $(F, \Gamma(F))$ eine k-dimensionale parametrisierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k+m}$ ist. ∎

Aufgabe 6. (Rotationsflächen) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Kurve, die in der x-z-Ebene liegt. Wir nehmen an, dass $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt. Wir erhalten nun eine stetig differenzierbare Abbildung

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Bild

$$M := f(I \times \mathbb{R}) = \{(x, y, z(t))\colon x^2 + y^2 = r(t)^2, t, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Das Bild dieser Funktion entsteht durch Rotation des Bildes von γ um die z-Achse. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass (f, M) eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist. ∎

Aufgabe 7. Welche Rotationsfläche erhält man für die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I := \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$? ∎

Aufgabe 8. Welche Rotationsfläche erhält man für die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R + r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I := \mathbb{R}$, wenn $r < R$ ist? ∎

Aufgabe 9. Welche Rotationsfläche erhält man für die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ 0 \\ \sinh t \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I := \mathbb{R}$? Hinweis: Beschreiben Sie zuerst das Bild von γ durch eine quadratische Gleichung. ∎