Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

7. Januar 2008

10. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Alternative Koordinatensysteme

In diesem Tutorium wollen wir uns andere Koordinatensysteme als die kartesischen Koordinaten für den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ansehen. Wir wollen hierbei den Satz über die Umkehrfunktion verwenden, um zu untersuchen, wo diese Umparametrisierungen zumindest lokal durch einen Diffeomorphismus gegeben sind.

Aufgabe 1. Wir beginnen mit den Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, um welche $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung F lokal umkehrbar ist. Ist F ein globaler Diffeomorphismus? Ist F injektiv/surjektiv? Finden Sie eine maximale Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass $F|_U$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.
Veranschaulichen Sie sich die neuen Koordinaten, indem Sie die Koordinatenlinien $F(\{r\}\times\mathbb{R})$ und $F(\mathbb{R}\times\{\varphi\})$ für verschiedene $r,\varphi\in\mathbb{R}$ skizzieren. ■

Aufgabe 2. Nun wollen wir dieses Vorgehen etwas verallgemeinern: Es sei eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\gamma'(t)\neq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$.
(ii) $\gamma(t+1)=\gamma(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ (γ ist 1-periodisch).
(iii) Für $0\neq v\in\mathbb{R}^2$ ist $]0,\infty[\cdot v\cap\gamma(\mathbb{R})$ einelementig.
Wir betrachten nun die Abbildung

$$F_\gamma\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \quad F_\gamma(r,t) := r\gamma(t).$$

Untersuchen Sie, in welchen $(r,t)\in\mathbb{R}^2$ die Abbildung F_γ lokal umkehrbar ist. Auf welchen Bereichen ist die Einschränkung von F_γ ein Diffeomorphismus?
Wie konkretisieren sich Ihre Bedingungen für die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3\cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}?$$ ■

Aufgabe 3. Nun wollen wir uns dem $\mathbb{R}^3$ zuwenden. Wir betrachten die beiden Abbildungen $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$F(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$G(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für beide Abbildungen alle Punkte, in denen sie lokal umkehrbar sind. Finden Sie für beide möglichst große Bereiche, auf denen sie sich jeweils zu Diffeomorphismen einschränken. Veranschaulichen Sie sich die Abbildungen, indem Sie die Hyperflächen skizzieren, die als Bilder der Flächen

$$\{a\} \times \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \times \{b\} \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^2 \times \{c\}$$

entstehen.
Aus nun offensichtlichen Gründen nennt man das erste Koordinatensystem Zylinderkoordinaten und das zweite Kugelkoordinaten. Überlegen Sie sich, welche geometrische Bedeutung φ und θ haben, wenn man $G(\{1\} \times \mathbb{R}^2)$ mit der Erdoberfläche identifiziert.

Aufgabe 4. Zuletzt wollen wir uns noch allgemeinen Rotationskoordinaten widmen. Sei dazu eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten die Abbildung $G_f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$G_f(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rf(z) \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rf(z)\cos\varphi \\ rf(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Punkte, in denen G_f lokal umkehrbar ist. Unter welchen Voraussetzungen ist G_f surjektiv? Skizzieren Sie wiederum die Hyperflächen, die als Bilder der Mengen

$$\{a\} \times \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \times \{b\} \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^2 \times \{c\}$$

entstehen.