Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

17. Dezember 2007

9. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Kraftfelder und Pfaffsche Formen

In diesem Tutorium widmen wir uns der Integration Pfaffscher Formen. Insbesondere wollen wir uns die physikalische Interpretation etwas genauer ansehen. Wir erinnern uns daran, dass eine Pfaffsche Form auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Abbildung

$$\omega\colon U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

ist, die jedem Punkt $p \in U$ eine lineare Abbildung zuordnet. Im folgenden sei U immer eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zuerst ein wenig Lineare Algebra:

Aufgabe 1. (a) Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$f_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_v(x) := \langle v, x\rangle = \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

linear.
(b) Für jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert genau ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x) = \langle v, x\rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2. (a) Ist $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so wird durch

$$\omega_F(p)(v) := \langle F(p), v\rangle$$

eine Pfaffsche Form mit $\omega_F = \sum_{i=1}^n F_i \, \mathtt{d}x_i$ definiert.
(b) Für jede Pfaffsche Form ω auf U existiert genau ein Vektorfeld F, so dass $\omega = \omega_F$ gilt.
Die Korrespondenz zwischen Pfaffschen Formen und Vektorfeldern ermöglicht es im Kontext der Physik, die Vektorfelder als Kraftfelder zu interpretieren und das Wegintegral $-\int_\gamma \omega_F$ als Arbeit (=Energie), die man aufzuwenden hat, um einen Punkt im Kraftfeld F entlang γ zu verschieben.

Aufgabe 3. Für $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definieren wir den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen v und w durch

$$\alpha := \arccos\Big(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\Big).$$

(a) Warum ist diese Definition sinnvoll?

(b) Wir zerlegen v in zwei Vektoren

$$v_1 := v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w \quad \text{und} \quad v_2 := \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w.$$

Zeigen Sie

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2.$$

(c) Zeige Sie, dass $\alpha = 0$ zu $v \in \mathbb{R}^+ w$ äquivalent ist.

(d) Zeige Sie, dass $\alpha = \pi$ zu $v \in -\mathbb{R}^+ w$ äquivalent ist.

Aufgabe 4. Leiten Sie die Formel für die Arbeit her, die notwendig ist, um einen Punkt entlang des stetig differenzierbaren Weges $\gamma\colon [0, 1] \to U$ durch das stetige Kraftfeld $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ zu bewegen. Dabei gehe man wie folgt vor.

(a) Man nehme als gegeben an, dass für eine Bewegung von p nach $p+h$ entlang eines geraden Wegen $\gamma(t) = p + th$ in einem konstanten Kraftfeld F die Arbeit $-\langle F, h\rangle$ zu verrichten ist. Interpretieren Sie diesen Ansatz (vgl. Aufgabe 3). Was bedeutet es, dass diese Größe positiv bzw. negativ ist.

(b) Ist $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \lim_{N\to\infty} I_N \quad \text{für} \quad I_N := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i^N),$$

für jede Wahl von Punkten $\xi_i^N \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$. Hinweis: Deuten Sie I_N als Integral einer Treppenfunktion f_N und zeigen Sie $f_N \rightrightarrows f$ (gleichmäßige Konvergenz).

(c) Für ein $N \in \mathbb{N}$ approximieren wir γ durch einen Polygonzug γ_N durch die Punkte $\gamma(\frac{i}{N})$, so dass für $t \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$ die Beziehung

$$\gamma_N(t) = \gamma(\frac{i}{N}) + (Nt - i)\big(\gamma(\frac{i+1}{N}) - \gamma(\frac{i}{N})\big)$$

gilt. Gemäß (a) liefert

$$I_N := -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \langle F\Big(\gamma(\frac{i}{N})\Big), \gamma(\frac{i+1}{N}) - \gamma(\frac{i}{N})\rangle$$

eine Approximation an die Arbeit, die notwendig ist, um entlag γ_N zu laufen. Zeige, $\lim_{N\to\infty} I_N = -\int_\gamma \omega_F$.