Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

10. Dezember 2007

8. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Gauß-Approximation

Heute geht es um eine Anwendung der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher. Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Polynom

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n$$

vom Grad höchstens n mit reellen Koeffizienten α_i, das die Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ möglichst gut im Sinne der L^2-Norm

$$\|h\|_2 := \sqrt{\int_a^b h(t)^2 \, dt}$$

approximiert. Anders ausgedrückt, suchen wir ein globales Minimum der Funktion

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \mapsto \|f - p\|_2^2 = \int_a^b \left(f(t) - \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \right)^2 dt.$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion F die Gestalt

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \qquad (*)$$

besitzt, mit einer symmetrischen Matrix $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $c \in \mathbb{R}$, wobei

$$a_{ij} = 2\int_a^b t^{i+j} \, dt, \quad b_i = -2\int_a^b f(t) t^i \, dt \quad \text{und} \quad c = \int_a^b f(t)^2 \, dt$$

ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte einer Funktion der Gestalt (*), indem Sie zeigen, das diese genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = -b$ sind. Wann besteht diese Menge aus genau einem Punkt?

Aufgabe 3. Wir nehmen nun an, dass die Matrix A in (*) positiv definit ist. Zeigen Sie:

(1) F besitzt genau einen kritischen Punkt x_0.

(2) In x_0 liegt ein globales Minimum vor. Hinweis: Betrachte die Funktion $h \mapsto F(x_0 + h)$.

Aufgabe 4. Ist $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $h \geq 0$, so folgt aus $\int_a^b h = 0$ schon $h = 0$. Hinweis: Betrachte eine Stammfunktion.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ aus Aufgabe 1 positiv definit ist.

Aufgabe 6. Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ auf.

Aufgabe 7. Setzen Sie $n = 2$ sowie $[a,b] = [0,1]$ und berechnen Sie A^{-1}. (Dazu können Sie zum Beispiel den Gauß-Algorithmus verwenden. Das Ergebnis sollte

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

sein.

Aufgabe 8. Berechnen Sie das quadratische Polynom, das auf $[0,1]$ die Funktion $f(t) := e^{-t}$ im Sinne der L^2-Norm am besten approximiert.