Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Dezember 2007

7. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Höhere Ableitungen vom höheren Standpunkt

Heute werden wir eine kompaktere Darstellung höherer partieller Ableitungen kennenlernen, die es erlaubt, Taylorpolynome zu beschreiben ohne gigantische Summen über Multiindizes zu verwenden.
Um den allgemeinen Fall besser zu verstehen, betrachten wir zuerst den Fall der Ordnung zwei.

Aufgabe 1. Sei $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie:
(1) Es existieren Vektoren $b_{ij} \in \mathbb{R}^m$, $i, j = 1, \ldots, n$, mit

$$(*) \qquad \beta(x, y) := \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b_{ij}.$$

(2) Für jede Matrix $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}^m)$ (mit Einträgen in $\mathbb{R}^m$) wird durch $(*)$ eine bilineare Abbildung definiert.
(3) Die bilineare Abbildung β ist symmetrisch, d.h., $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, genau dann, wenn die Matrix B symmetrisch ist, d.h, $b_{ij} = b_{ji}$ für alle i, j.

Aufgabe 2. Jede bilineare Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lässt sich in eindeutiger Weise in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegen:

$$\beta = \beta_+ + \beta_- \quad \text{mit} \quad \beta_+(x, y) = \beta_+(y, x) \quad \text{und} \quad \beta_-(x, y) = -\beta_-(y, x).$$

Hinweis: Betrachte $\frac{1}{2}(\beta(x, y) \pm \beta(y, x))$.

Aufgabe 3. (a) Ist $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine bilineare Abbildung, so ist $f(x) := \beta(x, x)$ ein $\mathbb{R}^m$-wertiges homogenes Polynom vom Grad 2, d.h., f is ein Polynom mit $f(tx) = t^2 f(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$.
(b) f hängt nur vom symmetrischen Anteil von β ab.
(c) Zu jedem homogenen Polynom $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vom Grad 2 existiert genau eine symmetrische bilineare Abbildung β mit $f(x) = \beta(x, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ihre Matrix ist gegeben durch

$$b_{ij} = D_i D_j f.$$

Aufgabe 4. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$, so definieren wir das *zweite Differential von* f *in* p durch

$$d^2 f(p)(h_1, h_2) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(df(x+th_2)(h_1) - df(x)(h_1)\big).$$

Zeigen Sie:
(1) $d^2 f(p)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine symmetrische bilineare Abbildung. Was ist die zugehörige Matrix?
(2) Das Taylorpolynom der Ordnung 2 von f hat die einfache Form

$$T_p^2(f)(x) = f(p) + df(p)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(p)(h,h).$$

Definition . Eine Abbildung $\beta\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ heißt k*-linear*, wenn alle Abbildungen der Gestalt

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto \beta(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k), \quad v_j \in \mathbb{R}^n \text{ fest},$$

linear sind.

Aufgabe 6. Sei $\beta\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ eine k-lineare Abbildung. Zeigen Sie:
(1) Es existieren Vektoren $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ mit

$$(**) \qquad \beta(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) := \sum_\alpha x^{(1)}_{\alpha_1} \cdots x^{(k)}_{\alpha_k} b_\alpha.$$

(2) Für jedes System von Vektoren $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \{1, \ldots, n\}^k$, wird durch $(**)$ eine k-lineare Abbildung definiert.
(3) Die k-lineare Abbildung β ist symmetrisch, d.h.,

$$\beta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \beta(v_1, \ldots, v_k)$$

für $v_i \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_k$ (die Permutationsgruppe), wenn

$$b_{(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(k)})} = b_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

für alle α und alle Permutationen σ gilt.

Aufgabe 7. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, so definieren wir das k*-te Differential von* f *in* p induktiv durch

$$\begin{aligned} &d^k f(p)(h_1, \ldots, h_k) \\ &:= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(d^{k-1} f(p+th_k)(h_1, \ldots, h_{k-1}) - d^{k-1} f(p)(h_1, \ldots, h_{k-1})\big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie (durch Induktion):
(1) $d^k f(p)\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ ist eine symmetrische k-lineare Abbildung.
(2) Das Taylorpolynom der Ordnung k von f hat die einfache Form

$$T_p^k(f)(x) = f(p) + df(p)(h) + \ldots + \frac{1}{k!} d^k f(p)(h, \ldots, h).$$