Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26. November 2007

6. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit

Heute sollen Zusammenhänge zwischen Stetigkeit, Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit untersucht werden. Wir betrachten als Beispiele Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Versuchen Sie für jede solche Funktion sich den Graphen zu veranschaulichen.

Aufgabe 1. Wiederholen Sie die folgenden Tatsachen aus der Vorlesung: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in \mathbb{R}^2$, dann ist f in p stetig, und alle Richtungsableitungen existieren in p. Insbesondere ist f in p partiell differenzierbar. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, wenn sie auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar ist (Wie müssen Sie für die letzte Behauptung argumentieren?).

Aufgabe 2. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, aber in $(0,0)$ nicht stetig. Insbesondere ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar. Was schliessen Sie hieraus für die partiellen Ableitungen? Veranschaulichen Sie sich den Funktionsgraphen in Polarkoordinaten, d.h., betrachten Sie $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Aufgabe 3. Die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) := \sqrt{|xy|}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig und in $(0,0)$ partiell differenzierbar, aber in $(0,0)$ existieren nicht alle Richtungsableitungen; insbesondere ist g in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 4. Die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig, und alle Richtungsableitungen in beliebigen Punkten existieren, aber h ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar. Hinweis: Wie hängen die Richtungsableitungen in $(0,0)$ von der Richtung (v_1, v_2) ab?

Aufgabe 5. Jetzt zu einem anderen Zusammenhang: die Funktion

$$k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar, aber die partiellen Ableitungen sind in $(0,0)$ nicht stetig.

Aufgabe 6. Zum Schluss betrachten wir ein Beispiel zu dem Satz von Schwarz: die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar und zweimal partiell differenzierbar, aber es gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$