Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19. November 2007

5. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Die Krümmung von Kurven

In diesem Tutorium wollen wir die Geometrie von Kurven im $\mathbb{R}^n$ etwas genauer studieren. Insbesondere wollen wir den Begriff der Krümmung definieren. Wir betrachten dabei stets den $\mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 1. Für $T > 0$ betrachten wir die differenzierbare Kurve

$$\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, \cosh t)$$

(die Kettenline). Finden Sie für f die Parametrisierung nach der Bogenlänge.
Hinweis: Es gilt $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ und die Umkehrfunktion des Sinus Hyperbolicus ist $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

Aufgabe 2. Sind $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zwei differenzierbare Kurven und $\langle \alpha, \beta \rangle\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ihr Skalarprodukt, so ist diese Funktion differenzierbar und es gilt die Produktregel

$$\langle \alpha, \beta \rangle' = \langle \dot{\alpha}, \beta \rangle + \langle \alpha, \dot{\beta} \rangle.$$

Aufgabe 3. Nun sei $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und nach der Bogenlänge parametrisiert, d.h., $\|\dot{\gamma}\| = 1$. Zeigen Sie, dass Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t)$ und Beschleunigung $\ddot{\gamma}(t)$ senkrecht aufeinander stehen, d.h. $\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = 0$. Veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt für $n = 2$.

Ist γ eine zweimal stetig differenzierbare nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, so definieren wir die *Krümmung* von γ in t durch

$$\kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(t)\|.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Krümmung für folgende Kurven, indem Sie zuerst eine Parametrisierung nach Bogenlänge finden:
(1) Eine affine Gerade $p + \mathbb{R}v$ in $\mathbb{R}^n$.
(2) Einen ebenen Kreis vom Radius r mit dem Mittelpunkt m.
(3) Die Kurve aus Aufgabe 1. Hinweis: Wenn Sie sich nicht verrechnet haben, ist das Ergebnis $\kappa(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Aufgabe 5. Nun betrachten wir für $r > 0$ und $h > 0$ die Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht).$$

Skizzieren Sie dieser Kurve. Welche geometrische Bedeutung haben r und h? Parametrisieren Sie diese Kurve nach der Bogenlänge und berechnen Sie ihre Krümmung. In welchem Verhältnis steht die Krümmung dieser Kurve zur Krümmung eines Kreises vom Radius r? Interpretieren Sie das Ergebnis. Was passiert für $h \to \infty$?

Aufgabe 6. Seien $m, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $r := \|v_1\| = \|v_2\|$ und $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ (beide Vektoren sind also gleichlang und stehen aufeinander senkrecht). Was beschreibt die Kurve

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = m + \cos\frac{t}{r} \cdot v_1 + \sin\frac{t}{r} \cdot v_2$$

geometrisch? Berechnen Sie die Krümmung dieser Kurve.

Aufgabe 7. Sei $\gamma\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ eine auf Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve mit $\kappa(t) > 0$ für alle t. Für ein festes t_0, bestimmen Sie m, v_1, v_2 so, dass η und γ in 0 bzw. t_0 das gleiche Taylorpolynom der Ordnung 2 besitzen, d.h.

$$\gamma(t_0) = \eta(0), \quad \gamma'(t_0) = \eta'(0) \quad \text{und} \quad \gamma''(t_0) = \eta''(0).$$

Die Kurve, die durch η beschrieben wird, nennt man dann den *Krümmungskreis von γ in t_0*. Für $n = 2$ ist er dadurch festgelegt, dass er die Kurve γ in t_0 berührt und die gleiche Krümmung besitzt (Skizze!).

Aufgabe 8. Ist $\beta\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar, so ist auch die reellwertige Funktion $\|\beta\|$ differenzierbar mit

$$\|\beta\|'(t) = \frac{\langle \beta(t), \beta'(t)\rangle}{\|\beta(t)\|}.$$

Wir wollen jetzt die Krümmung einer regulären Kurve ($\gamma'(t) \neq 0$) berechnen, die nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist. Sei dazu $\Gamma(t) := \gamma(s^{-1}(t))$ die Parametrisierung nach Bogenlänge, so dass $\gamma(t) = \Gamma(s(t))$ gilt.

Aufgabe 9. Zeigen Sie:

$$\dot\gamma(t) = \|\dot\gamma(t)\| \cdot \dot\Gamma(s(t)).$$

Differenzieren Sie dieser Gleichung nach t und zeigen Sie

$$\kappa_\Gamma(s(t)) = \frac{\sqrt{\|\dot\gamma(t)\|^2 \|\ddot\gamma(t)\|^2 - \langle \dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\rangle^2}}{\|\dot\gamma(t)\|^2}.$$

Da die Krümmung von Γ an der Stelle $s(t)$ definitionsgemäß mit der Krümmung von γ an der Stelle t übereinstimmt, erhalten wir so eine Formel für die Krümmung von γ, ohne vorher auf Bogenlänge parametrisieren zu müssen.