Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. November 2007

4. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Metriken und Teilmengen metrischer Räume

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass wir mit der Metrik eines metrischen Raums nicht nur Abstände von Punkten messen können, sondern auch Abstände von Punkten zu Teilmengen und von kompakten Teilmengen zueinander. Insbesonder werden wir daraus ableiten können, dass die Menge $\mathcal{C}(X)$ der kompakten Teilmengen eines metrischen Raums selbst wieder zu einem metrischen Raum gemacht werden kann.
Durchgehend sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir definieren den Abstand eines Punktes $p \in X$ zu einer nichtleeren Teilmenge A durch

$$\operatorname{dist}_A(p) := \inf\{d(p,a) \colon a \in A\} \in [0,\infty[.$$

Für zwei nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq X$ definieren wir ihren Hausdorff-Abstand in $[0,\infty]$ durch

$$\operatorname{dist}(A,B) := \sup\{\operatorname{dist}_B(a), \operatorname{dist}_A(b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

Wir wollen uns nun an die Bedeutung dieser Abstandsbegriffe herantasten.

Aufgabe 1. Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige:
(a) Die Abstandsfunktion dist_A ist stetig. Hinweis: Zeige

$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y)$$

(vgl. auch Bemerkung IX.3.18 im Skript).
(b) $\overline{A} = \{x \in X \colon \operatorname{dist}_A(x) = 0\}$. Hinweis: Charakerisierung des Abschlusses durch Grenzwerte von Folgen.

Aufgabe 2. Für eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq X$ und $r \geq 0$ definieren wir die offene bzw. abgeschlossene r-Umgebung von A durch

$$U_r(A) := \{x \in \operatorname{dist}_A(x) < r\} \quad \text{bzw.} \quad U_r^{\leq}(A) := \{x \in \operatorname{dist}_A(x) \leq r\}.$$

Zeige:
(1) Für jedes $r > 0$ ist $U_r(A)$ eine offene Teilmenge von X.
(2) Für jedes $r > 0$ ist $U_r^{\leq}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Hinweis: Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildunge sind abgeschlossen.
(3) $A \subseteq U_r^{\leq}(B)$ und $B \subseteq U_r^{\leq}(A)$ ist äquivalent zu $\operatorname{dist}(A,B) \leq r$.

Aufgabe 3. (a) Beschreibe die Mengen $U_r^{\leq}(\mathbb{Z})$ in $X = \mathbb{R}$.
(b) Für welche Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ ist $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}) < \infty$.

Aufgabe 4. Sind A und B nichtleere kompakte Teilmengen von X, so ist

$$\operatorname{dist}(A, B) < \infty.$$

Hinweis: dist_A ist auf B beschränkt und umgekehrt.

Aufgabe 5. Ist $B \subseteq U_r^{\leq}(A)$ und $C \subseteq U_s^{\leq}(B)$, so ist $C \subseteq U_{r+s}^{\leq}(A)$.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{C}(X)$ die Menge der kompakten Teilmengen von X. Zeige: $(\mathcal{C}(X), \operatorname{dist})$ ist ein metrischer Raum.

Graphen von Funktionen

Aufgabe 7. Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist ihr Graph

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x))\colon a \leq x \leq b\}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Hinweis: Die Funktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, f(x))$ ist stetig.

Aufgabe 8. Für zwei Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ haben wir im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$:

$$\operatorname{dist}(\Gamma(f), \Gamma(g)) \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_{[a,b]}.$$

Schliessen Sie daraus, dass für jede gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $f_n \rightrightarrows f$ auch

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(f_n) = \Gamma(f)$$

in dem metrischen Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ gilt.

Absteigende Folgen kompakter Mengen

Aufgabe 9. Sind $A \subseteq B$ kompakte Teilmengen des metrischen Raumes (X, d), so ist

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{r > 0\colon B \subseteq U_r^{\leq}(A)\}.$$

Aufgabe 10. Ist (A_n) eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen des metrischen Raums (X, d), so gilt:

(1) $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Hinweis: Wäre A leer, so wären die Mengen $(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge A_1.
(2) Ist U eine offene Menge, die A enthält, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n \subseteq U$. Hinweis: Die Mengen $A_n \setminus U$ bilden eine absteigende Folge kompakter Mengen, so dass sich (1) anwenden lässt.
(3) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ im metrischen Raum $\mathcal{C}(X)$.