Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. November 2007

3. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Topologische Grundbegriffe

Wir haben in der Vorlesung offene und abgeschlossene Menge kennengelernt, sowie das Innere, den Rand und den Abschluss einer Menge. In diesem Tutorium üben wir uns im Umgang mit diesen Begriffsbildungen. Im folgenden steht (X, d) immer für einen metrischen Raum.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Existiert ein $r > 0$, für das $d(x, y) > r$ für alle Paare (x, y) mit $x \neq y$ gilt, so gilt:
(1) Alle Teilmengen $M \subseteq X$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
(2) Gilt $a_n \to p$ in X, so existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = p$ für $n > N_0$ (die Folge ist "schließlich" konstant). ■

Teilmengen können also sehr wohl gleichzeitig offen und abgeschlossen sein, auch wenn sie von X selbst verschieden sind.

Aufgabe 2. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *diskret*, wenn zu jedem $m \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$M \cap U_\varepsilon(m) = \{m\}$$

gilt. Sind diskrete Teilmengen eines metrischen Raums immer abgeschlossen? Hinweis: Betrachte $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ in $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$. ■

Aufgabe 3. Zeige: (a) Jede einpunktige Teilmenge $\{p\}$ in X ist abgeschlossen.
(b) Jede endliche Teilmenge $M \subseteq X$ ist diskret und abgeschlossen. ■

Aufgabe 4. Zeige: Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist (Y, d_Y) mit der eingeschränkten Metrik $d_Y := d|_{Y \times Y}$ ein metrischer Raum. Man spricht dann von einem (metrischen) Teilraum von X. ■

Aufgabe 5. Seien $M \subseteq Y$ Teilmengen des metrischen Raums (X, d). Dann können wir M als Teilmenge des metrischens Raums (X, d) und als Teilmenge des metrischen Teilraums (Y, d_Y) betrachten. Zeige:
(1) Ist M in X offen/abgeschlossen, so auch in Y.
(2) $M :=]0, 1]$ ist offen in $Y := [0, 1]$, aber nicht in $X := \mathbb{R}$.
(3) $M :=]0, 1[$ ist abgeschlossen in $Y =]0, 1[$, aber nicht in X. ■

Aufgabe 6. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U_r(p)$ die offene Kugel vom Radius r um p. Bestimmen Sie den Rand $\partial U_r(p)$. Ist diese Menge immer nichtleer? ■

Aufgabe 7. In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Menge

$$M :=]0,1[^2 \cup]1,2[^2.$$

Bestimmen Sie $\overline{M}$ und ∂M. ■

Aufgabe 8. Zeige Sie, dass die Abbildung $M \mapsto \overline{M}$ auf der Menge $\mathbb{P}(X)$ der Teilmengen eines metrischen Raums (X, d) die folgenden Eigenschaften hat:
(H1) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ (Monotonie).
(H2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (Idempotenz)
(H3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(H4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
(H5) $\overline{X} = X$. ■

Aufgabe 9. Finde Eigenschaften (I1)-(I5) der Operation $M \mapsto M^0$, die zu den Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle analog sind. ■

Aufgabe 10. Zeige: Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist $A^0 \subseteq \overline{A}^0$. Gilt sogar immer Gleichheit? Wenn ja, wie zeigt man das? Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an. ■