Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

30. Oktober 2007

2. Tutorium zur Vorlesung Analysis II
WS 2007

Rechnen mit Taylorentwicklungen

In diesem Tutorium beschäftigen wir uns mit rechnerischen Aspekten der Taylorentwicklung (siehe Abschnitt VII.2 des Skripts, der in der Vorlesung nicht behandelt wurde). Der Einfachheit halber betrachten wir hier meist n-mal differenzierbare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das 0 enthält). Wir schreiben dann

$$T^n(f)(x) := T_0^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} x^k$$

für das n-te Taylorpolynom von f in 0. Ist f beliebig oft differenzierbar, so schreiben wir $T(f) := T_0^\infty(f)$ für die Taylorreihe von f in 0.
Die Verträglichkeit der Addition von Funktionen mit Taylorentwicklung ist einfach:

Aufgabe 1. Sind $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ mindestens n mal differenzierbar, so ist

$$T^n(f+g) = T^n(f) + T^n(g) \quad \text{und} \quad T^n(\lambda f) = \lambda T^n(f) \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die folgende Überlegung dient dazu, eine entsprechende Formel für kompliziertere Verknüpfungen von f und g zu erhalten. Sie besagt, dass Funktionen, die sich in 0 nur bis auf Terme der Ordnung $\geq n+1$ unterscheiden, die gleichen Taylorpolynome der Ordnung n besitzen.

Aufgabe 2. Sind $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ mindestens $n+1$ mal differenzierbar und existiert eine stetige Funktion $\psi \colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + x^{n+1}\psi(x)$, so ist $T^n(f) = T^n(g)$.
Hinweis: Betrachte $h := f - g$; Bemerkung VII.1.7.

Aufgabe 3. Für eine Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ ist $T^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Aufgabe 4. Sind $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbare Funktionen, so gilt

$$T^n(f \cdot g) = T^n(T^n(f) \cdot T^n(g)). \tag{1}$$

Erläutere diese Formel in eigenen Worten.

Aufgabe 5. Sind $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen, so gilt die allgemeine Leibniz-Formel:

$$(f \cdot g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} \cdot g^{[n-k]}.$$

In welcher Beziehung steht dies zu (1)?

Aufgabe 6. Bestimme $T^4(e^x \cos x)$ mit der Methode aus Aufgabe 4.

Aufgabe 7. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mindestens $n+1$ mal differenzierbar und $f(D) \subseteq \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $g(x) := \frac{1}{f(x)}$ definiert und ebenso oft differenzierbar. Wie kann man das Polynom $T^n(g)$ möglichst direkt berechnen? Finde eine rekursive Methode zu Bestimmung der Polynome $T^k(g)$, $k \leq n$. Hinweis: Formel (1).

Aufgabe 8. Wende die Methode aus Aufgabe 7 auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

an und berechne $T^4(1/f)$. Die Zahlen $\beta_n = (1/f)^{[n]}(0)$ heißen *Bernoulli-Zahlen*.

Jetzt betrachten wir zwei $n+1$ mal differenzierbare Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Dann ist die Komposition $g \circ f$ auf einem Intervall um 0 definiert und ebenfalls $n+1$ mal differenzierbar (warum?)

Aufgabe 10. Finde Formeln für $(g \circ f)''$ und $(g \circ f)'''$ (höhere Kettenregeln).
Wie man in Aufgabe 10 sieht, wird es sehr aufwändig $(g \circ f)^{[n]}$ zu berechnen. Man such daher nach einer einfacheren Methode, $T^n(g \circ f)$ zu bestimmen. Wir wollen dazu ein einigen Schritten zeigen, dass die einfache Formel

$$T^n(g \circ f) = T^n(T^n(g) \circ T^n(f)) \tag{2}$$

gilt.
Wir reduzieren zuerst auf den Fall, dass g ein Polynom ist:

Aufgabe 11. Zeige: $T^n(g \circ f) = T^n(T^n(g) \circ f)$. Hinweis: Verwende die Darstellung $g(x) = T^n(g)(x) + x^{n+1}\psi(x)$ mit einer stetigen Funktion ψ und Aufgabe 2.

Aufgabe 12. Zeige: Für $k \leq n$ ist: $T^n(f^k) = T^n(T^n(f)^k)$.

Aufgabe 13. Zeige (2).