§ 14 Selbstadjungierte Operatoren

In diesem Abschnitt seien H, H_1, H_2 Hilberträume über $\mathbb{C}$.

14.1. Definition. Sei $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ und $\Phi_1 : H_1 \to H_1'$, $\Phi_2 : H_2 \to H_2'$ der kanonische Isomorphismus aus 10.13. Die *(Hilbertraum)-Adjungierte* T^* von T ist definiert durch

$$T^* := \Phi_1^{-1} T' \Phi_2.$$

Bemerkung:

a) Für alle $x \in H_1$ und $y \in H_2$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \Phi_2(y)(Tx) = T'(\Phi_2(y))(x) = \langle x, \Phi^{-1}T'\Phi_2 y\rangle = \langle x, T^*\rangle.$$

Diese Eigenschaft characterisiert den adjungierte Operator.

b) Für $T \in \mathscr{L}(H)$ gelten $T^* : H \to H$ und $T^* \in \mathscr{L}(H)$.

14.2. Bemerkung. Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ $S, U \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ $V \in \mathscr{L}(H_2, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden

a) $\|S\| = \|S^*\|$, $S^{**} = S$, $(S+U)^* = S^* + U^*$, $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$, $(VU)^* = U^* V^*$.
Die algebraische Eigenschaften folgen hier aus der Definition. Für $x \in H_1$ gilt $\|S*\| = \|\Phi_1^{-1} S' \Phi_2\| \leq \|S'\| = \|S\|$. Somit gilt $\|S^*\| \leq \|S\|$. Da $S^{**} = S$ folgt die umgekehrte Ungleichung auch.

b) $\|TT^*\| = \|T\|^2$, denn

$$\|TT^*\| \leq \|T\| \cdot \|T^*\| = \|T\|^2; \qquad \|T^*x\|^2 \leq w(TT^*) = \|TT^*\|, \quad \forall \|x\| \leq 1.$$

c) Ist T normal, dann für jede $x \in H$ folgt $\|Tx\| = \|T^*x\|$, denn

$$0 = \langle (TT^* - T^*T)x, x\rangle = \|T^*x\|^2 - \|Tx\|^2.$$

Insbesondere ist $\ker T = \ker T^*$.

d) Es gilt $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^{\perp}$. Denn:

$$y \in (\operatorname{im} T)^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in H \ \langle Tx, y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in H \ \langle x, T^*y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \ker T^*.$$

14.3. Definition. Ein linearer Operator $T \in \mathscr{L}(H)$ heißt

(a) *normal*, falls $TT^* = T^*T$;

(b) *unitär*, falls $TT^* = T^*T = Id$;

(c) *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$.

Bemerkung:

a) Ist $T \in \mathscr{L}(H)$ normal so gilt $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für jedes $x \in H$. Insbesondere gilt $\ker T^* = \ker T$. Denn: $\|Tx\|^2 = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \|T^*x\|^2$.

b) Ist $T \in \mathscr{L}(H)$ normal, so ist $\lambda - T$ auch normal. Insbesondere gilt nach a) $P\sigma(T) = P\sigma(T^*)$.

14.4. Satz. Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal, dann gilt $\sigma(T) = A\sigma(T)$.

Beweis. In allgemein gilt $A\sigma(T) \subseteq \sigma(T)$. Um die Umkehrung zu zeigen sei jetzt $\lambda \in \sigma(T)$. Ist $\lambda - T$ nicht injektiv, so folgt $\lambda \in P\sigma(T) \subseteq A\sigma(T)$. So köennen wir $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ annehmen. Da $\lambda \in \sigma(T)$, so kann $(\lambda - T)$ nicht surjektiv sein. Es gilt $\{0\} = \ker(\lambda - T) = \ker(\lambda - T)^* = \mathrm{im}(\lambda - T)$. D.h. $\mathrm{im}(\lambda - T)$ ist dicht in H, und so kann nicht abgeschlossen sein, denn es würde dann die Surjektivität heißen. Dies zeigt $\lambda \in A\sigma(T)$. ∎

14.5. Definition und Satz. Das *numerische Wertbereich* eines Operators $T \in \mathscr{L}(H)$ ist durch

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| \leq 1\} \quad \text{gegeben.}$$

Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal. Dann gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Nach Satz 14.4 existiert eine Folge $(x_n) \subseteq H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\lambda x_n - Tx_n \to 0$. So gilt $\langle (\lambda - T)x_n, x_n\rangle = \lambda\|x_n\|^2 - \langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$, d.h. $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$, somit ist $\lambda \in \overline{W(T)}$ gezeigt. ∎

Satz: Für $T \in \mathscr{L}(H)$ gilt $r(T) = \|T\|$,.

Beweis. Es gilt

$$\left(\|T\|^2\right)^{2^n} = \|TT^*\|^{2^n} = \|(TT^*)^{2^n}\| = \|T^{2^n}(T^{2^n})^*\| = \|T^{2^n}\|^2.$$

also $r(T)^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(\|T^{2^n}\|^2\right)^{1/2^n} = \|T\|^2$. ∎

14.6. Satz. Für $T \in \mathscr{L}(H)$ normal gilt $w(T) = \|T\|(= r(T))$, mit

$$w(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\} \qquad \textit{der numerische Radius}.$$

Beweis. Nach Satz 12.10 existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T) = \|T\|$. Betrachte jetzt den Operator $e^{i\varphi}T$, wobei $e^{i\varphi}$ ist so gewählt, dass $e^{i\varphi}\lambda = |\lambda|$. Dann ist $e^{i\varphi}T$ auch normal und gilt $r(e^{i\varphi}T) = r(T) \in \sigma(e^{i\varphi}T)$. Nach Satz 14.5 gilt $r(T) \in \overline{W(T)}$, und somit $r(T) \leq w(T)$. Nach dem obigen Satz gilt $\|T\| = r(T)$, und somit $\|T\| = r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$, wie ein kurzes Rechenen die letzte Ungleichung zeigt. ∎

Satz: Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert. Wir setzen $m := \inf\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$ und $M := \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$. Dann gilt

$$\sigma(T) \subseteq [m, M] \subseteq [-\|T\|, \|T\|],$$

ferner gehören m und M zu $\sigma(T)$.

Beweis. Dass $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ gilt, folgt aus Satz 14.5, denn für selbstadjungiertes $T \in \mathscr{L}(H)$ gilt $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Nehmen wir $m = 0$ und $M = w(T)$ an. Dies ist nämlich keine Einschränkung, denn wir können statt T den Operator $T - m$ betrachten. Es gilt dann $w(T - m) = w(T) - m$, $r(T - m) = M - m$.

Also, unter dieser Annahme, gilt $M = w(T) = \|T\| = r(T)$, und so folgt nach Theorem 12.10, dass $\sigma(T) \subseteq [0, M]$ gilt und $M = r(T)$ zum Spektrum gehört. So sehen wir $M \in \sigma(T)$.

Das selbe Argument für $T - M$ gibt $m - M \in \sigma(T - M)$, und so $m \in \sigma(T)$. ∎

14.7. Lemma [Orthogonale Eigenvektoren]. Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert und λ, μ verschiedene Eigenwerten von T. Wenn x bzw. y ein Eigenvektor von T zu λ und μ ist, gilt dann $x \perp y$.

Beweis. Es gilt

$$0 = \langle Tx - \lambda x, y\rangle = \langle x, (T - \lambda)^* y\rangle = \langle x, T^*y - \lambda y\rangle = \langle x, T^*y - \mu y + (\mu - \lambda)y\rangle = (\mu - \lambda)\langle x, y\rangle.$$

∎

14.8. Satz. Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Dann existiert ein ONS $e_1, e_2, \ldots$ sowie eine Nullfolge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass

$$H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{lin}}\{e_1, e_2, \ldots\}, \quad \text{und} \qquad Tx = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j, \qquad \text{für alle } x \in H,$$

wobei λ_j die von 0 verschiedenen Eigenwerten von T mit zugehörigen Eigenvektoren e_j sind. Ferner ist $\|T\| = \max |\lambda_j|$.

Beweis. Seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$ die abzählbar viele, von 0 verschiedene Eigenwerten von T, und sei $d_i := \dim \ker(\mu_i - T) < +\infty$ (siehe Korollar 13.2). Die Folge (λ_j) definieren wir durch

$$\lambda_1, \lambda_2 \cdots = \underbrace{\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_1}_{d_1}, \underbrace{\mu_2, \mu_2, \ldots, \mu_2}_{d_2} \cdots \underbrace{\mu_n, \mu_n, \ldots, \mu_n}_{d_n} \cdots .$$

So konvergiert dann λ_n gegen 0. Wir wählen eine orthonormale Basis $e_i^1, e_i^2, \ldots, e_i^{d_i}$ in $\ker(\mu_i - T)$, und setzen

$$e_1, e_2 \cdots = \underbrace{e_1^1, \ldots, e_1^{d_1}}, \underbrace{e_2^1, \ldots, e_2^{d_2}}, \ldots, \underbrace{e_k^1, \ldots, e_k^{d_k}}, \ldots$$

Dann ist $\{e_j\}$ ein ONS und es gilt $Te_j = \lambda e_j$. Ferner ist $\ker T \perp e_j$. Wir definieren $H_1 := \ker T \oplus \overline{\operatorname{lin}}\{e_1, e_2, \ldots\}$. Es ist dann $H = H_1$ zu zeigen. Sei $y \in H_1^\perp$, dann gilt $y \perp e_j$ und

$$\langle Ty, e_j \rangle = \langle y, T^* e_j \rangle = \langle y, \lambda_j e_j \rangle = \lambda_j \langle y, e_j \rangle = 0.$$

Ferner ist $y \perp \ker T$, also für $x \in \ker T$ haben wir $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0$. Das heißt $Ty \in H_1^\perp$, folglich $TH_1^\perp \subseteq H_1^\perp$. Die Einschränkung von T auf $H_1^\perp$ ist auch kompakt, also nach Theorem 13.8 hat sie einen Eigenwert (falls $H_1^\perp \neq \{0\}$) μ mit Eigenvektor $0 \neq x \in H_1^\perp$. D.h. $Tx = \mu x$, und so gilt $x \in \overline{\operatorname{lin}}\{e_j\}$ und $x \in H_1 \cap H_1^\perp = \{0\}$. So folgt ein Widerspruch, also endlich $H_1 = H$. Sei $x \in H$ und

$$x = y + \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j, \qquad y \in \ker T$$

da T stetig ist, gilt

$$Tx = Ty + \sum_j \langle x, e_j \rangle Te_j = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Die letzte Behauptung folgt aus Satz 14.6 ∎

14.9. Satz [Spektralsatz für kompakten, normalen Operatoren]. Sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Dann existiert $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$ und eine ONB (e_n) mit $Te_n = \lambda_n e_n$ und

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{für alle } x \in H.$$

Beweis. Wir verwenden Satz 14.8 und betrachten auch in $\ker T$ eine ONB. ∎

14.10. Satz. Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Seien $\lambda_n \neq 0$ die Eigenwerten von T und $e_n^1, e_n^2, \ldots, e_n^{d_n}$ die zugehörige orthogonale Eigenvektoren. Wir setzen

$$P_n x := \sum_{j=1}^{d_n} \langle x, e_n^j \rangle e_n^j,$$

die Orthogonalprojektion auf $\ker(\lambda_n - T)$. Dann konvergiert die Reihe

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad \text{in Operatornorm.}$$

Beweis. Satz 14.8 zeigt $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x$ für alle $x \in H$. Es bleibt also die Konvergenz in Operatornorm zu beweisen. Dazu zeigen wir, dass $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$ eine Cauchyfolge ist. Sei $m \geq n$

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} \lambda_j P_j\right\| = \max\{|\lambda_j| : j = n, \ldots, m\} \to 0,$$

wie gezeigt im Satz 14.8, denn $\sum_{j=n}^{m} \lambda_j P_j$ ist ein normaler Operator mit nicht null Spektrumpunkte $\{\lambda_j : j = n, \ldots, m\}$. ■

14.11. Korollar [Spektralsatz für kompakten, normalen Operatoren, Multiplikator-Form]. Sei H ein separabler (unendlichdimensionaler) Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Es gibt ein unitärer Operator $U : H \to \ell^2$ (d.h. eine surjektive Isometrie), so dass $T = U^* M_{(\lambda_n)} U$ ist ein Multiplikator für eine geeignete Folge $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$. Also ist das folgende Diagram kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H \\ U \downarrow & & \uparrow U^* \\ \ell^2 & \xrightarrow{M_{(\lambda_n)}} & \ell^2 \end{array}$$

Beweis. Sei (e_n) die ONB aus Satz 14.9 und $(\lambda_n) \in \mathbb{C}$ die zugehörige Folge von Eigenwerten. Wir definieren $U : H \to \ell^2$ durch

$$Ux := (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \langle x, e_3 \rangle, \ldots).$$

Wie im Korollar 10.24 beweist man, dass U eine surjektive Isometrie ist, deren Inverse durch

$$U^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = U^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

gegeben ist. Für $(x_n) \in \ell^2$ gilt

$$UTU^{-1}(x_n) = UT \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = U \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_j \Big\rangle e_j = \; = U \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots) = M_{(\lambda_n)}(x_n),$$

also folgt die Behauptung. ■

14.12. Theorem. Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal. So existiert eine Funktion $E : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(H)$ definiert auf der Borel-σ-Algebra, mit den Eigenschaften

i) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = Id$

ii) $E(A)$ ist Orthogonalprojektion für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

iii) $(A \cap B) = E(A) \cdot E(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

iv) Für $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, $A \cap B = \emptyset$ gilt $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$.

v) Für $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ paarweis disjunkte Folge gilt $\left\langle E\Big(\bigcup_n A_n\Big)x, y\right\rangle = \sum_n \langle E(A_n)x, y\rangle$,

so dass die folgende Aussagen gelten:

a) $E(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$.

b) Für jedes $x, y \in H$ gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\mathbb{C}} Id \,\mathrm{d}\langle E(\cdot)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}\langle E(\cdot)x, y\rangle.$$

c) Es gilt $ST = TS$ genau dann, wenn $SE(A) = E(A)S$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Eine Funktion mit Eigenschaften i)-v) heißt *Projektormaß*. Die obige Funktion E heißt die *Spektralmaß* des Operators T.