§ 13 Spektrum kompakter Operatoren

In diesem Abschnitt sei X stets ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und T ein kompakter Operator.

13.1. Satz. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Für $\lambda \neq 0$ gelten

(a) $\dim \ker(\lambda - T) < +\infty$

(b) $\operatorname{im}(\lambda - T)$ ist abgeschlossen

Beweis. (a) Betrachte $S = T$ eingeschränkt auf $\ker(\lambda - T) =: Y$. Dann gilt $S \in \mathscr{L}(Y)$ und $S = \lambda Id$. Da S ist kompakt, folgt $\dim Y < \infty$ nach Korollar 5.8.

(b) Es sei $(\lambda - T)x_n \to x$, also $x \in \overline{\operatorname{im}(\lambda - T)}$. Es ist zu zeigen $x \in \operatorname{im}(\lambda - T)$. OBDA können wir annehmen $\|x_n\| \leq 2d_n$, mit $d_n := \operatorname{dist}(x_n, \ker(\lambda - T))$.

Annahme: d_n ist unbeschränkt
Es existiert eine Teilfolge mit $d_n \to \infty$ (Wir bezeichen die Teilfolge wieder mit d_n). Setze $y_n := x_n/d_n$, also $(\lambda - T)y_n \to 0$, denn $(\lambda - T)x_n \to x$. Da y_n beschränkt und T kompakt ist, hat Ty_n eine weitere Teilfolge, die wir wieder mit Ty_n bezeichnen, die gegen ein y konvergiert. Es gilt $y_n = 1/\lambda(Ty_n + (\lambda - T)y_n) \to y/\lambda$ d.h. $\lambda y_n \to y$, und so gilt $Ty_n \to Ty/\lambda$ auch. Dies zeigt $y = Ty/\lambda$, d.h. $y \in \ker(\lambda - T)$.

$$\begin{aligned}\|\lambda y_n - y\| &\geq |\lambda| \operatorname{dist}(y_n, \ker(\lambda - T)) = |\lambda| \operatorname{dist}(\tfrac{x_n}{d_n}, \ker(\lambda - T)) \\ &= \tfrac{|\lambda|}{d_n} \operatorname{dist}(x_n, \ker(\lambda - T)) = |\lambda| > 0\end{aligned}$$

Das ist unmöglich, denn $\lambda y_n \to y$, folglich war unsere Annahme falsch, so ist also d_n beschränkt.
Wegen der Kompaktheit hat Tx_n eine konvergente Teilfolge, $Tx_n \to z$. Da $(\lambda - T)x_n \to x$, folgt

$$x \leftarrow (\lambda - T)x_n = (\lambda - T)\tfrac{1}{\lambda}(Tx_n + (\lambda - T)x_n) \to \tfrac{(\lambda - T)}{\lambda}(z + x),$$

und $x \in \operatorname{im}(\lambda - T)$. ■

13.2. Korollar. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\lambda \neq 0$ ist

(a) $\dim \ker(\lambda - T)^n < \infty$, und

(b) $\operatorname{im}(\lambda - T)^n$ abgeschlossen.

Beweis.

$$(\lambda - T)^n = \lambda^n Id + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i}(-T)^i = \lambda^n Id + \underbrace{T \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i}(-T)^{i-1}}_{\text{kompakt}},$$

und verwende Satz 13.1. ■

13.3. Bemerkung.

(a) $\{0\} = \ker(\lambda - T)^0 \subset \ker(\lambda - T)^1 \subseteq (\ker - T)^2 \subset \cdots$

(b) $X = \operatorname{im}(\lambda - T)^0 \supset \operatorname{im}(\lambda - T)^1 \supset \operatorname{im}(\lambda - T)^2 \supset \cdots$

13.4. Lemma. Sei $\lambda \neq 0$.

(a) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\ker(\lambda - T)^n = \ker(\lambda - T)^{n+1} = \ker(\lambda - T)^{n+l} \qquad \forall l \in \mathbb{N}.$$

(b) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{im}(\lambda - T)^m = \operatorname{im}(\lambda - T)^{m+1} = \operatorname{im}(\lambda - T)^{m+l} \qquad \forall l \in \mathbb{N}.$$

(c) Sei n_λ bzw. m_λ die Minimale solche Zahlen wie in (a) und (b), dann gilt $n_\lambda = m_\lambda$.

Beweis. (a) Notation: $N_n := \ker(\lambda - T)^n$. Nehmen wir an, das die Behauptung falsch ist, nämlich $N_n \subsetneq N_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Riesz–Lemma 5.7 liefert $y_n \in N_n$, $\|y_n\| = 1$, und $\|y_n - x\| \geq 1/2$ für alle $x \in N_{n-1}$. Sei $m < n$, dann

$$Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \underbrace{((\lambda - T)y_n + \lambda y_m - (\lambda - T)y_m)}_{=:x \in N_{n-1}}.$$

Also $\|Ty_n - Ty_m\| = |\lambda|\|y_n - x/|\lambda|\| \geq |\lambda|/2$, aber dann besitzt Ty_n keine konvergente Teilfolge. Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von T. D.h. $N_m = N_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

(b) Methode wie in (a). Notation $R_n := \operatorname{im}(\lambda - T)^n$.

<u>Ann.</u>: $R_{n+1} \neq R_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Da R_n nach Lemma 13.2 abgeschlossen ist, können wir das Riesz–Lemma verwenden, also existiert $y_n \in R_n$, $\|y_n\| = 1$, $\|y_n - x\| \geq 1/2$ für jede $x \in R_{n+1}$. Sei $m < n$, dann

$$Ty_m - Ty_n = \lambda y_m - \underbrace{((\lambda - T)y_m + \lambda y_n - (\lambda - T)y_n)}_{=:y \in R_{m+1}}.$$

Also $\|Ty_m - Ty_n\| = |\lambda|\|y_m - x/|\lambda|\| \geq |\lambda|/2$. Wie im Teil (a) ist dies ein Widerspruch zur Kompaktheit von T.

(c) <u>Schritt 1:</u> $m_\lambda \geq n_\lambda$.
Aus (b) folgt $R_{m_\lambda+1} = R_{m_\lambda}$, d.h. $(\lambda - T)R_{m_\lambda} = R_{m_\lambda}$.

<u>Beh.</u>: Für $x \in R_{m_\lambda}$ mit $(\lambda - T)x = 0$ gilt $x = 0$.
Wenn es nicht so wäre, finden wir $0 \neq x_1 \in R_{m_\lambda} = R_{m_\lambda+1}$ mit $(\lambda - T)x_1 = 0$. So existiert $x_2 \in R_{m_\lambda}$ mit $(\lambda - T)x_2 = x_1$, und induktiv erhalten wir die Folge $x_1, x_2, x_3, \dots \in R_{m_\lambda}$ mit $x_i = (\lambda - T)x_{i+1}$. Also $0 \neq x_1 = (\lambda - T)x_2 = (\lambda - T)^2 x_3 = \dots = (\lambda - T)^{n-1}x_n$ und $0 = (\lambda - T)x_1 = (\lambda - T)^2 x_2 = \dots = (\lambda - T)^n x_n$, d.h. $x_n \in N_n \setminus N_{n-1}$, ein Widerspruch zu (a).

<u>Beh.</u>: $N_{m_\lambda+1} = N_{m_\lambda}$ (dann folgt $m_\lambda \geq n_\lambda$ nach Definition)
Sei $x \in N_{m_\lambda+1}$, d.h. $(\lambda - T)^{m_\lambda+1}x = 0$. Da $y := (\lambda - T)^{m_\lambda}x \in R_{m_\lambda}$ ist $(\lambda - T)y = 0$ gilt, folgt $y = 0$, d.h. $x \in N_{m_\lambda}$. Also $N_{m_\lambda+1} \subset N_{m_\lambda}$. Die Inklusion $N_{m_\lambda} \subset N_{m_\lambda+1}$ ist klar.

<u>Schritt 2:</u> $m_\lambda \leq n_\lambda$.
Sei $m_\lambda \geq 1$, sonst ist nichts zu beweisen. Nach Definition gilt $R_{m_\lambda} \subsetneq R_{m_\lambda-1}$. Sei $y \in R_{m_\lambda-1} \setminus R_{m_\lambda}$. Dann ist $y = (\lambda - T)^{m_\lambda-1}x$ für ein x und $(\lambda - T)y \in R_{m_\lambda} = R_{m_\lambda+1}$, d.h. $(\lambda - T)y = (\lambda - T)^{m_\lambda+1}z$ für ein z. Es gilt:

$$(\lambda - T)^{m_\lambda-1}(x - (\lambda - T)z) = \underbrace{y}_{\notin R_{m_\lambda}} - \underbrace{(\lambda - T)^{m_\lambda}z}_{\in R_{m_\lambda}} \neq 0,$$

d.h. $x - (\lambda - T)z \notin N_{m_\lambda-1}$, aber $x - (\lambda - T)z \in N_{m_\lambda}$, denn

$$(\lambda - T)^{m_\lambda}(x - (\lambda - T)z) = (\lambda - T)y - (\lambda - T)y = 0.$$

Damit folgt $N_{m_\lambda-1} \subsetneq N_{m_\lambda} \implies m_\lambda \leq n_\lambda$. ∎

13.5. Theorem [Schauder]. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Dann besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ aus abzählbar vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.

Beweis. Sei $\lambda \notin P\sigma(T)$, dann $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ und $\lambda - T$ ist injektiv. Lemma 13.4 (c) liefert $0 = n_\lambda = m_\lambda$. Folglich ist $\lambda - T$ bijektiv und $\lambda \in \rho(T)$. Also $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq P\sigma(T)$ (vgl. Bemerkung 12.2).

Behauptung: für alle $M > 0$ ist $\{\lambda \in P\sigma(T) : |\lambda| \geq M\}$ endlich.
Nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist: $\exists\, M_0 > 0$ und λ_n verschiedene Eigenwerten von T mit $|\lambda_n| \geq M_0$, und mit zugehörigen Eigenvektoren e_n. Setze $X_n := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$, da $\dim X_n = n$ (dies beweist man mit Induktion), gilt $X_{n-1} \subsetneqq X_n$. Das Lemma von Riesz 5.7 liefert $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x\| \geq 1/2$ für alle $x \in X_{n-1}$. Damit folgt

$$Tx_n - Tx_m = \lambda_n x_n - \underbrace{(\lambda_n x_n - Tx_n + Tx_m)}_{=:x \in X_{n-1}}, \quad m < n,$$

denn $x_m \in X_m \subseteq X_{n-1}$, also $Tx_m \in X_{n-1}$ und $X_n \ni x_n = \alpha_n e_n + y$, wobei $y \in X_{n-1} \Longrightarrow (\lambda_n - T)x_n = (\lambda_n - T)y \in X_{n-1}$. Wie in der Beweis von Lemma 13.4 (a) und (b) folgt, dass Tx_n keine konvergente Teilfolge hat, also ein Widerspruch. ∎

13.6. Satz [Riesz–Zerlegung]. Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Dann

$$X = \ker(\lambda - T)^{n_\lambda} \oplus \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}.$$

Beweis. Sei $x \in X$, und setzte $z = (\lambda - T)^{n_\lambda} x$, also $z \in R_{n_\lambda} = R_{2n_\lambda}$, d.h. $z = (\lambda - T)^{2n_\lambda} x_1$ für ein $x_1 \in X$. Sei $x_0 = (\lambda - T)^{n_\lambda} x_1$, also $x_0 \in R_{n_\lambda}$ und $(\lambda - T)^{n_\lambda} x_0 = z$. Daraus folgt $(\lambda - T)^{n_\lambda}(x - x_0) = z - z = 0$ und $x = x - x_0 + x_0$. Ferner gilt $x \in \ker(\lambda - T)^{n_\lambda} \cap \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda} = \{0\}$, denn gehört x zum Durchschnitt, gilt $x = (\lambda - T)^{n_\lambda} y$ für ein y. Es gilt:

$$0 = (\lambda - T)^{n_\lambda} x = (\lambda - T)^{2n_\lambda} y,$$

also $y \in N_{2n_\lambda} = N_{n_\lambda}$, und so $x = (\lambda - T)^{n_\lambda} y = 0$. ∎

13.7. Korollar. Die Unterräume in der obigen Zerlegung sind T-invariant und

$$\sigma(T|_{\operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}.$$

Beweis. Da T und $(\lambda - T)^{n_\lambda}$ kommutieren, die Aussage über Invarianz ist klar. Für das Spektrum bemerke, dass $\lambda - T : X \to X$ genau dann injektiv ist, wenn $(\lambda - T)|_{\ker(\lambda - T)^{n_\lambda}}$ und $(\lambda - T)|_{\operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}}$ beide injektiv sind, und dass $\lambda - T : X \to X$ genau dann surjektiv ist, wenn $(\lambda - T)|_{\ker(\lambda - T)^{n_\lambda}}$ und $(\lambda - T)|_{\operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}}$ beide surjektiv sind. ∎

13.8. Theorem [Riesz–Schauder, Spektralsatz für kompakten Operatoren]. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Dann gelten die folgende Aussagen

(a) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus abzählbar vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.

(b) $\dim X = \infty \Longrightarrow 0 \in \sigma(T)$

(c) Für $\lambda \neq 0$ ist $\dim \ker(\lambda - T)^n < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$

(d) Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ existiert $n_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$X = \ker(\lambda - T)^{n_\lambda} \oplus \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}.$$

Beweis. Alle Aussagen sind bereits bewiesen. ∎

13.9. Korollar [Fredholmsche Alternative]. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt und $\lambda \neq 0$. Betrachte die Gleichung $\lambda x - Tx = y$ für ein $y \in X$. Dann gilt: *Entweder* ist die Gleichung $\lambda x - Tx = y$ für alle $y \in X$ lösbar, *oder* die Gleichung $\lambda x - Tx = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

Beweis. Folgt aus Theorem 13.8, oder aus die Gleichheit $n_\lambda = m_\lambda$. ∎