§ 12 Spektrum und Resolvente

In diesem Abschnitt sei stets X ein Banachraum über $\mathbb{C}$.

12.1. Definition. Sei T ein abgeschlossener, linearer Operator $T : X \to X$.

(a) Die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\lambda - T$ stetig invertierbar ist heißt *die Resolventenmenge* von T und wird mit $\rho(T)$ bezeichnet. Ist $\lambda \in \rho(T)$, heißt $R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1} := (\lambda Id - T)^{-1}$ *die Resolvente* von T an der Stelle λ.

(b) Die Menge $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt *das Spektrum* von T, die Bezeichnung ist dafür $\sigma(T)$.

Bemerkung: Für eine lineare Abbildung $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ besteht $\sigma(T)$ aus Eigenwerten von T.

12.2. Bemerkung. Aus dem Satz von offenen Abbildungen folgen die folgenden Charakterisierungen

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T : X \to X \text{ ist injektiv und surjektiv}\},\\ \sigma(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T : X \to X \text{ ist nicht injektiv oder nicht surjektiv}\}.\end{aligned}$$

12.3. Satz [Resolventengleichung]. Sei T ein linearer Operator und $\lambda \in \rho(T)$. Dann gilt

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\lambda - \mu) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$

Beweis. Seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Nach Definition

$$\begin{aligned}(\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A))R(\mu, A) &= R(\mu, A) \quad \text{und}\\ R(\lambda, A)(\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)) &= R(\lambda, A).\end{aligned}$$

Nach Substraktion der zwei Gleichungen erhalten wir die Behauptung. ∎

12.4. Bemerkung. Die Resolventengleichung könnte man verwenden, um die komplexe Differenzierbarkeit der Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ zu zeigen. Dies tuen wir wir aber später auf einer anderen Weise.

12.5. Definition [Spektralradius]. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Dann heißt

$$r(T) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n},$$

der *Spektralradius* von T.

12.6. Lemma [Fekete]. Sei $0 < s_n$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $s_{n+m} \leq s_n \cdot s_m,\ n, m \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $s_n^{1/n}$ gegen $s := \inf_{n \in \mathbb{N}} s_n^{1/n}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und $n \in \mathbb{N}$ so, daß $s_n^{1/n} \leq s + \varepsilon$. Wir schreiben $m = tn + r_m$ mit $t, r_m \in \mathbb{N}$, $1 \leq r_m < n$. Dann gilt:

$$s_m \leq s_{tn} s_{r_m} \leq s_n^t s_{r_m} \leq (s + \varepsilon)^{nt} s_{r_m} = (s + \varepsilon)^{nt + r_m} (s + \varepsilon)^{-r_m} s_{r_m}.$$

Da für r_m nur endlich viele Möglichkeiten existieren, erhalten wir $s_m^{1/m} \leq (s + \varepsilon)(s + \varepsilon)^{-r_m/m} s_{r_m}^{1/m} \to s + \varepsilon$ für $m \to \infty$. Das heißt für genügend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt $s \leq s_m^{1/m} \leq s + 2\varepsilon$. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

12.7. Satz.

(a) $\lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$ existiert und ist gleich $r(T)$.

(b) Es gelten: $r(T) \leq \|T\|$, $r(ST) = r(TS)$.

Beweis. (a) Folgt aus dem Lemma von Fekete.

(b) $r(T) \leq \|T\|$ folgt aus der Definition. Wegen

$$\|(ST)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \left(\|S\|\|(TS)^{n-1}\|\|T\|\right)^{\frac{1}{n}},$$

gilt $r(ST) \leq r(TS)$. Analog, $r(TS) \leq r(ST)$.

■

12.8. Satz [Neumann–Reihe]. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ und $a \in \mathbb{C}$, $r(T) < |a|$. Dann ist $a \in \rho(T)$ und

$$R(a,T) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} T^n.$$

Beweis. Die Reihe hier konvergiert, denn sei $r(T) < a' < |a|$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^{-(n+1)} T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{-(n+1)} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a|^{-(n+1)} \|T^n\| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a|^{-(n+1)} a'^n < +\infty.$$

Ferner gilt

$$(a-T)\sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} T^n (a-T) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} T^{n+1} = Id.$$

■

12.9. Satz. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen in $\mathbb{C}$, und so ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Fernern ist die Funktion $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, T)$ analytisch (komplex differenzierbar, holomorph).

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \rho(T)$. Dann gilt:

$$\lambda - T = \mu - T + \lambda - \mu = (Id - (\mu - \lambda)R(\mu, T))(\mu - T).$$

Falls $|\mu - \lambda| < 1/\|R(\mu, T)\|$, ist der Operator $(Id - (\mu - \lambda)R(\mu, T))$ invertierbar, da die Neumannsche Reihe

$$(Id - (\mu - \lambda)R(\mu, T))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, T)^n$$

konvergiert. Dies zeigt $B\big(\mu, \frac{1}{\|R(\mu,T)\|}\big) \subseteq \rho(T)$.

Um die Analyzität zu zeigen, reich es nur zu Bemerken, dass $R(\lambda, T)$ lokal durch eine Potenzreihe gegeben ist. ■

12.10. Satz [Spektrum beschränkter Operatoren]. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt, nicht leer und $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, r(T))}$. Ferner existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$.

Beweis. Nach Satz 12.9 ist das Spektrum abgeschlossen, und nach Satz 12.8 ist es beschränkt. Es gilt sogar $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, r(T))}$.

<u>Annahme:</u> $\sigma(T) = \emptyset$.
Wir zeigen, dass die Resolvente in ∞ gegen 0 konvergiert. Aus der Neumann–Reihe folgt

$$\|R(a,T)\| \leq \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|T\|^n = \frac{1}{a(1 - \|T\|/a)} \leq \frac{2}{a},$$

falls $a > 2\|T\|$.
Auf $B(0, 2\|T\|)$ ist die Resolvente wegen Kompaktheit und Stetigkeit beschränkt. Da die Resolvente $R(\lambda, T)$ analytisch auf $\rho(T) = \mathbb{C}$ ist, folgt mit dem Satz von Liouville, dass $R(\lambda, T) = 0$. So erhalten wir ein Widerspruch.

Annahme: $\sigma(T) \subset B(0, r)$ für ein $r < r' < r(T)$
Sei $\varphi \in \mathscr{L}(X)'$. Dann ist $\varphi(R(\lambda, T))$ durch eine Potenzreihe um 0 gegeben, nämlich auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r(T))}$. Aber die Reihe konvergiert auf jedem größeren Kreisring, in dem $\varphi(R(\lambda, T))$ analytisch ist, also auch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)}$. Insbesondere heißt das, dass $\varphi(T^n/\lambda^{n+1})$ für $|\lambda| > r$ beschränkt ist. Folglich ist auch T^n/λ^{n+1} beschränkt, d.h. $\|T^n\| \leq M r'^{n+1}$, also $r(T) \leq r'$. ∎

12.11. Definition [Unterteilung des Spektrums]. Sei $T : X \to X$ ein abgeschlossener Operator.

(a) $P\sigma(T) := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda - T \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt das *Punktspektrum* von T und $\lambda \in P\sigma(T)$ heißen *Eigenwerte*. Der Vektor $0 \neq x \in X$ heißt *Eigenvektor* zu λ falls $Tx = \lambda x$.

(b) $A\sigma(T) := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{im}(\lambda - T) \text{ ist nicht abgeschlossen oder } \lambda - T \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt das *approximative Punktspektrum* von T

(c) $R\sigma(T) := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{im}(\lambda - T) \text{ ist nicht dicht in } X\}$ heißt das *Residualspektrum* von T

12.12. Bemerkung. Sei T ein abgeschlossener Operator. Dann gilt

$$\sigma(T) = P\sigma(T) \cup A\sigma(T) \cup R\sigma(T).$$

Beweis. Da T abgeschlossen ist, ist $\lambda \in \rho(T)$ gdw. $\lambda - T$ bijektiv ist (siehe Bemerkung 12.2).
Also gilt $\lambda \notin P\sigma(T) \cup A\sigma(T) \cup R\sigma(T)$ genau dann, wenn $\lambda - T$ nicht injektiv ist und $\operatorname{im}(\lambda - T) \neq X$. Aber $\operatorname{im}(\lambda - T) \neq X$ gilt genau dann, wenn $\operatorname{im}(\lambda - T)$ nicht dicht oder nicht abgeschlossen ist. Dies beweist die Aussage. ∎

12.13. Satz [Spektraler Abbildungssatz für Resolventen]. Sei $T : X \to X$ linear mit $\rho(T) \neq \emptyset$. Dann gilt:

(a) $\sigma(R(\lambda_0, T)) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{\lambda_0 - \mu} : \mu \in \sigma(T)\}$ für alle $\lambda_0 \in \rho(T)$.

(b) Insbesondere gilt die Aussage für $P\sigma(T)$, $A\sigma(T)$, $R\sigma(T)$.

Beweis. Sei $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \rho(T)$.

$$\begin{aligned}(\mu - R(\lambda_0, T))x &= \mu((\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}) - T)R(\lambda_0, T)x \quad \text{für } x \in X\\ &= \mu R(\lambda_0, T)((\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}) - T)x \quad \text{für } x \in X.\end{aligned}$$

Also $\ker(\mu - R(\lambda_0, T)) = \ker((\lambda_0 - \frac{1}{\mu}) - T)$ und $\operatorname{im}(\mu - R(\lambda_0, T)) = \operatorname{im}((\lambda_0 - \frac{1}{\mu}) - T)$. ∎

12.14. Korollar. Sei $\lambda \in \rho(A)$. Dann $\|R(\lambda, A)\| \geq r(R(\lambda, A)) \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))}$.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 12.7 und dem Spektralen Abbildungssatz für Resolventen. ∎

12.15. Lemma. Für $T \in \mathscr{L}(X)$ liegt $\lambda \in \mathbb{C}$ in $A\sigma(T)$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n) \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$ existiert.

Beweis. Ist T nicht injektiv, gilt die Aussage trivialweise. Sei also T injektiv, d.h. es existiert der Operator $(\lambda - T)^{-1} : (\mathrm{im}(\lambda - T), \|\cdot\|) \to X$. Der Operator hier ist abgeschlossen, und daher, nach Satz 11.14, genau dann *nicht* beschränkt, wenn $\mathrm{im}(\lambda - T)$ *nicht* abgeschlossen ist. Aber die Nicht-Beschränktheit des Operators $(\lambda - T)^{-1} : (\mathrm{im}(\lambda - T), \|\cdot\|) \to X$ ist zu der Bedingung im Satz äquivalent. ∎

12.16. Korollar. Für $T \in \mathscr{L}(X)$ gilt $\partial\sigma(T) \subseteq A\sigma(T)$.

Beweis. Sei $\mu \in \partial\sigma(T) \subseteq \sigma(T)$ und $\lambda_n \to \mu$ mit $\lambda_n \in \rho(T)$. Aus Korollar 12.14 folgt, dass $\|R(\lambda_n, T)\| \to +\infty$ gilt. Dach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit existiert $x \in X$ mit $\|R(\lambda_n, T)x\| \to +\infty$. Setze $x_n := \frac{R(\lambda_n,T)x}{\|R(\lambda_n,T)x\|}$. Dann gilt

$$(\mu - T)x_n = (\mu - \lambda_n)x_n + (\lambda_n - T)x_n = (\mu - \lambda_n)x_n + \frac{x}{\|R(\lambda_n, T)x\|} \to 0, \quad \text{d.h. } \mu \in A\sigma(T).$$

∎

12.17. Satz [Spektrum adjungierten Operatoren]. Für $T \in \mathscr{L}(X)$ gelten die folgende Aussagen

(a) $R\sigma(T) = P\sigma(T')$.

(b) $\sigma(T) = \sigma(T')$ und für $\lambda \in \rho(T)$ gilt $R(\lambda, T)' = R(\lambda, T')$.

Beweis. (a) Sei $\mathrm{im}(\lambda - T)$ nicht dicht. Nach dem Satz von Hahn–Banach existiert dann ein $0 \neq \varphi \in \ker(\lambda - T')$.
Sei $0 \neq \varphi \in \ker(\lambda - T')$. Dann ist $\varphi(\mathrm{im}(\lambda - T)) = 0$, d.h. $\overline{\mathrm{im}(\lambda - T)} \neq X$.

(b) Sei $\lambda \in \rho(T)$. Für alle $x \in X$ $\varphi \in X'$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi((\lambda - T)R(\lambda, T)x) = ((\lambda - T')\varphi)(R(\lambda, T)x) = (R(\lambda, T)'(\lambda - T')\varphi)(x)\\
\varphi(x) &= \varphi(R(\lambda, T)(\lambda - T)x) = (R(\lambda, T)'\varphi)((\lambda - T)x) = ((\lambda - T')R(\lambda, T)'\varphi)(x).
\end{aligned}$$

Dies liefert $\lambda \in \rho(T')$ und $R(\lambda, T') = R(\lambda, T)'$. Es bleibt also nur noch $\rho(T') \subseteq \rho(T)$ zu zeigen. Im Folgenden identifizieren wir X mit einem abgeschlossenem Unterraum von X''. Sei also $\lambda \in \rho(T')$ und damit $\lambda \in \rho(T'')$. D.h. $\lambda - T'' : X'' \to X''$ ist surjektiv und injektiv. Da $\lambda - T : X \to X$ ist die Einschränkung von $\lambda - T''$ auf X, so folgt die Injektivität von $\lambda - T$ auch. Aus (a) wissen wir ferner, dass $\mathrm{im}(\lambda - T)$ dicht ist. Wir zeigen, dass es auch abgeschlossen ist, und somit ist $\lambda - T$ surjektiv. Sei also $(\lambda - T)x_n \to y$. D.h. $(\lambda - T'')x_n \to y$, und somit $x_n = R(\lambda, T'')(\lambda - T'')x_n \to R(\lambda, T'')y$. Aber die Folge (x_n) liegt in X, und daher liegt ihr Grenzwert auch in X. D.h. $R(\lambda, T'')y \in X$, und somit gilt $(\lambda - T)R(\lambda, T'')y = (\lambda - T'')R(\lambda, T'')y = y$ und so $y \in \mathrm{im}(\lambda - T)$. Wir haben also gezeigt, dass für $\lambda \in \rho(T')$ die Abbildung $\lambda - T : X \to X$ bijektiv ist, dies endet den Beweis. ∎