§ 11 Hauptsätze für lineare Operatoren

11.1. Definition. Sei X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.

(a) M heißt *nirgends dicht* in X, falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt enthält.

(b) M heißt von *1. Kategorie* in X, falls es eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.

(c) M heißt von *2. Kategorie*, falls M nicht von 1. Kategorie ist.

11.2. Satz [Baire–Kategoriensatz]. Jeder vollständige, metrische Raum $X \neq \emptyset$ ist von 2. Kategorie in sich. Also ist $X \neq \emptyset$ vollständig und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, wobei A_n abgeschlossen sind, dann enthält wenigstens ein A_n eine nicht leere, offene Teilmenge.

Beweis. Idee: Annahme: X wäre von 1. Kategorie in sich. Dann würde

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

gelten, mit nirgends dichten Mengen M_n. Wir konstruieren eine Cauchyfolge (x_n) deren Grenzwert x in keinem M_n enthalten ist. So erhalten wir dann einen Widerspruch.

Konstruktion dieser Folge: Da M_1 nirgends dicht und $\mathring{X} \neq \emptyset$ ist, ist $X \setminus \overline{M_1}$ offen und nicht leer. Daher finden wir $x_1 \in X$ und $1 > r_1 > 0$ mit $B(x_1, r_1) \cap \overline{M_1} = \emptyset$. Es seien $n > 1$ und r_k, x_k, $k < n$ definiert. Da M_n nirgends dicht ist, ist

$$B(x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2}) \cap X \setminus \overline{M_n} \neq \emptyset$$

und offen. Daher existiert wir $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1})$ und $0 < r_n < r_{n-1}/2$ mit $B(x_n, r_n) \cap \overline{M_n} = \emptyset$. Nach Konstruktion ist (x_n) eine Cauchyfolge, und wegen der Vollständigkeit von X konvergiert x_n gegen ein x. Ferner für $m > n$ gilt $d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + r_n/2 \to r_n/2$, d.h. $x \in B(x_n, r_n) \subseteq X \setminus \overline{M_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. ■

11.3. Theorem [Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit]. Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $T_\alpha \in \mathscr{L}(X, Y)$ für $\alpha \in I$. Ist

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_Y < +\infty, \quad x \in X,$$

so gilt

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Beweis. Definiere

$$E_n := \Big\{ x \in X : \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_Y \leq n \Big\}.$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ gilt. Ferner sind die Mengen E_n abgeschlossen, denn

$$E_n = \bigcap_{\alpha \in I} \|T_\alpha(\cdot)\|_Y^{-1}([0, n]).$$

Nach dem Baire-Kategoriensatz existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ und $r > 0$ mit $B(x_0, r) \subseteq E_{n_0}$. Sei $x \in X$ beliebig und setze $z = x_0 + rx/(2\|x\|)$, dann gilt $\|z - x_0\| \leq r/2$ und insbesondere $z \in B(x_0, r)$. Daraus folgt $\|T_\alpha x_0\|, \|T_\alpha z\| \leq n_0$ für alle $\alpha \in I$. Also gilt

$$\|T_\alpha x\| = \frac{2\|x\|}{r} \|T_\alpha(z - x_0)\| \leq \frac{4n_0}{r} \|x\|.$$

■

11.4. Satz [Banach–Steinhaus]. Es seien X, Y Banachräume und $T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in X$ existiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Dann ist $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

Beweis. T ist linear, und verwende Theorem 11.3. ∎

11.5. Definition. Eine Abbildung T zwischen metrischen Räumen X, Y heißt *offen*, wenn das Bild TU einer offenen Menge U in X offen in Y ist.

11.6. Bemerkung.

(a) Sei T bijektiv. Dann T offen $\Longleftrightarrow T^{-1}$ stetig.

(b) Ist $T : X \to Y$ linear, so gilt

$$T \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \delta > 0\; B(0, \delta) \subseteq TB(0, 1).$$

Beweis. Definition nachrechnen. ∎

11.7. Lemma. Es seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv. Dann existiert $\delta > 0$ mit $B(0, \delta) \subseteq T(B(0, 1))$.

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritte:

1. $\overline{T(B(0, 1/2))}$ enthält eine offene Kugel.
2. $\overline{T(B(0, 1/2^n))}$ enthält eine offene Kugel um 0.
3. $T(B(0, 1))$ enthält eine offene Kugel um 0.

1. Schritt: Mit $B := B(0, 1/2) \subseteq X$ gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$. Aus den Eigenschaften von T folgt

$$Y = T(X) = T\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nB) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{nT(B)}.$$

Da Y vollständig ist, folgt aus dem Baire–Kategoriensatz, dass $\overline{nT(B)}$ für ein n eine offene Kugel enthält. Daraus folgt dasselbe für $\overline{T(B)}$, d.h. $B(y_0, \varepsilon) \subseteq \overline{T(B)}$ gilt mit einem $\varepsilon > 0$.

2. Schritt: Das obige Argument gibt ein $\varepsilon > 0$ und ein $y_0 \in \overline{T(B)}$ mit $B(y_0, \varepsilon) - y_0 \subseteq \overline{T(B)} - y_0$. Sei $y \in B(0, \varepsilon) \subseteq \overline{T(B)} - y_0$, also $y + y_0 \in \overline{T(B)}$. Dann existiert eine Folge $u_n = Tw_n \in T(B)$ mit $u_n \to y + y_0$ und $v_n = Tz_n \in T(B)$ mit $v_n \to y_0$. Dann $w_n - z_n \in B(0, 1)$, $Tw_n - Tz_n \to y$, also $y \in \overline{TB(0, 1)}$. Das heißt $B(0, \varepsilon) = B(y_0, \varepsilon) - y_0 \subseteq \overline{TB(0, 1)}$, und daraus $B(0, \varepsilon/2^n) \subseteq \overline{TB(0, 1/2^n)}$.

3. Schritt: Wir zeigen $B(0, \varepsilon/2) \subseteq TB(0, 1)$. Sei $y \in B(0, \varepsilon/2)$, und wähle $Tx_1 \in TB$ mit $\|y - Tx_1\| \leq \varepsilon/4 \Longrightarrow y - Tx_1 \in \overline{TB(0, 1/2^2)}$ nach Schritt 2. Ferner existiert ein $Tx_2 \in TB(0, 1/2^2)$ mit $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| \leq \varepsilon/8$. Also $y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{TB(0, 1/2^3)}$ usw. So erhalten wir induktiv die Folge $x_n \in B(0, 1/2^{n+1})$. Dann gilt

$$\Big\| y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i \Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Setze $z_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, dann ist z_n eine Cauchyfolge (ausrechnen!), und konvergiert so gegen ein $z \in B(0, 1)$. Weiter gilt $Tz_n \to Tz$ und so $Tz = y$, so schließlich $y \in TB(0, 1)$. ∎

11.8. Satz [Offene Abbildung]. Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann T ist offen.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma 11.7 und Bemerkung 11.6. ∎

11.9. Korollar.

(a) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ bijektiv $\Longrightarrow T^{-1}$ ist stetig.

(b) Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen mit denen X vollständig ist, und die $\|x\| \leq M|||x|||$ für alle $x \in X$ erfüllen. Dann sind die zwei Normen äquivalent.

Beweis. (a) Die Behauptung folgt aus Satz 11.8 und Bemerkung 11.6.

(b) Betrachte

$$\mathrm{Id} : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|).$$

Dann ist Id bijektiv, d.h. $\mathrm{Id}^{-1} = \mathrm{Id}$ ist stetig nach (a). Also gilt;

$$|||x||| = |||\mathrm{Id}^{-1}||| \leq C\|x\|, \quad x \in X.$$

∎

11.10. Definition [abgeschlossener Operator]. Seien X, Y normierte Vektorräume, $D \subseteq X$ Unterraum und $A : D \to Y$ linear. Der Operator A heißt *abgeschlossen*, falls

$$\left.\begin{aligned} D \ni x_n \to \quad & x \in X \\ Ax_n \to \quad & y \in Y \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x \in D \text{ und } Ax = y.$$

11.11. Bemerkung.

(a) Ein Operator $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ ist abgeschlossen.

(b) Sei $A : D \to Y$ linear. Dann ist der *Graph* von A gegeben durch

$$\mathrm{gr}(A) := \{(x, Ax) : x \in D\} \subseteq X \times Y.$$

(c) $\mathrm{gr}(A)$ ist ein Unterraum von $X \times Y$.

(d) A ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow \mathrm{gr}(A)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis. ÜA. ∎

11.12. Beispiel. Sei $X = C([0,1])$ und $A : X \supset C^1([0,1]) \to X$, $Af := f'$. Dann ist A abgeschlossen.

Beweis. Sei $f_n \in C[0,1]$ mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Es gilt $f_n(x) - f_n(y) = \int_x^y f_n'(t)\,\mathrm{d}t$. Dies liefert durch Grenzübergang die Identität $f(x) - f(y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$. Da $g(t)$ stetig ist, so ist $f(x)$ differenzierbar mit Ableitung g. ∎

11.13. Lemma. Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq X$ Unterraum und $A : X \supset D \to Y$ linear.

(a) D versehen mit der Graphnorm $|||x|||_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ ist ein Banachraumg gdw. A abgeschlossen ist.

(b) $A : (D, |||\cdot|||_A) \to Y$ ist stetig

Beweis. ÜA. ∎

11.14. Satz [vom abgeschlossenen Graphen]. Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq X$ Unterraum und $A : D \to Y$ linear und abgeschlossen. Ist D in X abgeschlossen, so ist A auch beschränkt. Insbesondere ist ein überalldefinierter abgeschlossener Operator stetig.

Beweis. Nach Lemma 11.13 ist $\mathrm{gr}(A)$ abgeschlossen in $X \times Y$. Betrachte die Abbildung $P : \mathrm{gr}(A) \to D$, $(x, Ax) \mapsto x$. Dann ist P linear, beschränkt und bijektiv. Aus Korollar 11.9 erhalten wir die Stetigkeit von P^{-1}, und so

$$\|Ax\| \le \|Ax\| + \|x\| = \|(x, Ax)\| \le M\|x\| \qquad \text{für alle } x \in D.$$

■