§ 10 Hilberträume

10.1. Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt *Skalarprodukt*, falls

(a) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$ für $x_1, x_2, y \in X$

(b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ für $x, y \in X$ (Komplexe Konjugation nur im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$ (für $x \in X$)

X versehen mit einem Skalarprodukt heißt Prähilbertraum.

10.2. Lemma. Sei H ein Prähilbertraum. Es gelten:

(a) *Cauchy–Schwarz-Ungleichung*: $|\langle x, y\rangle| \leq |\langle x, x\rangle|^{1/2} \cdot |\langle y, y\rangle|^{1/2}$ für alle $x, y \in H$.

(b) Die Abbildung $x \mapsto \langle x, x\rangle^{1/2} =: \|x\|$ ist eine Norm.

Beweis. (a) Seien $x, y \in H$ und λ, $|\lambda| = 1$ so, dass $\lambda \cdot \langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$. Betrachte die Funktion p definiert für $r \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$p(r) := \|x + r\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\ \lambda r\langle x, y\rangle + \|\lambda r\|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + 2r|\langle x, y\rangle| + r^2\|y\|^2 \geq 0$$

So ist $p(r)$ ein Polynom zweiten Grades, und es ist nicht negativ. Für die Diskriminante heißt dies $4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \leq 0$, die gewünschte Ungleichung.

(b) Seien $x, y \in H$. Wir rechen immer mit "Norm-Quadrat":

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

wobei wir die Cauchy-Schwartz-Ungleichung verwendet haben. ■

10.3. Lemma [Parallelogrammgleichung]. Ein normierter Vektorraum ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn für alle $x, y \in H$ $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ gilt.

Beweis. Nur eine Richtung: Sei H Prähilbertraum. Kurzes Nachrechnen liefert:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

■

10.4. Definition. Sei H ein Prähilbertraum versehen mit der Norm $\|c\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Ist dieser normierte Vektorraum $(H, \|\cdot\|)$ vollständig so heißt es ein *Hilbertraum*.

10.5. Beispiel. Beispiele von Hilberträumen

(a) $\mathbb{C}^d$ mit Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{d} x_i\overline{y_i}$.

(b) ℓ^2 mit Skalarprodukt $\langle (x_n), (y_n)\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$.

(c) $L^2(M, \mu)$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_M f\overline{g}\, \mathrm{d}\mu$.

10.6. Definition [Orthogonalität]. Sei H ein Prähilbertraum.

(a) Die Vektoren $x, y \in H$ heißen *orthogonal* ($x \perp y$), falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. (Aus Definition ist es leich zu sehen, dass $\perp$ eine symmetrische Relation ist.)

(b) Die Mengen $A, B \subseteq H$ heißen *orthogonal* ($A \perp B$), falls $a \perp b$ für alle $a \in A$, $b \in B$.

(c) Sei $M \subseteq H$. Das *orthogonale Komplement* von M ist definiert durch

$$M^\perp := \{x \in H : x \perp M\}.$$

10.7. Satz.

(a) $x \perp y \Longrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ (Pythagoras).

(b) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(c) $N, M \subseteq H$, $N \subseteq M \Longrightarrow M^\perp \subseteq N^\perp$

(d) $M \subseteq M^{\perp\perp}$ und $\overline{\text{lin}}(M)^\perp = M^\perp$

Beweis. (a) Es gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\text{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 0 + \|y\|^2$ wegen $x \perp y$.

(b) Seien $x, y \in M^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Es gilt $\langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle = 0+0$ für jedes $z \in M$. Also ist $M^\perp$ ein Unterraum. Konvergiert $(x_n) \subseteq M^\perp$ gegen ein x, so gilt für jedes $z \in M$ auch die Konvergenz $\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle$ (wegen Cauchy-Schwartz). Da $\langle x_n, z\rangle = 0$ gilt für jedes $z \in M$, so gilt $\langle x, z\rangle =$, d.h. $x \in M^\perp$.

(c) Trivial aus Definition.

(d) Sei $z \in M$. So ist $\langle x, y\rangle = 0$ für jedes $y \in M^\perp$, d.h. $z \in M^{\perp\perp}$. Also $M \subseteq M^{\perp\perp}$. Nach c) gilt $M^\perp \supseteq \overline{\text{lin}}(M)^\perp$. Ist aber $y \perp M$ so ist wegen Linearität $y \perp \text{lin}(M)$, und wie in b zeigt man $y \perp \overline{\text{lin}}(M)$. ∎

10.8. Satz [Projektionssatz]. Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ eine abgeschlossene, konvexe Menge und $x_0 \in H$. Dann existiert ein eindeutiges $x \in K$ mit $\|x - x_0\| = \inf_{y\in K} \|y - x_0\|$.

Beweis. OBdA nehmen wir $x_0 = 0$ und $0 \notin K$ an (sonst Verschiebung).

Existenz: Sei $\delta := \inf_{y\in K} \|y\|$. Dann findet man eine Folge $(y_n) \subseteq K$ mit $\|y_n\| \to \delta$. Nach der Parallelogrammgleichung

$$\delta^2 \leq \left\|\tfrac{y_n+y_m}{2}\right\| \leq \left\|\tfrac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\tfrac{y_n-y_m}{2}\right\|^2 = \tfrac{1}{2}\|y_n\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y_m\|^2 \to \delta^2,$$

d.h. (y_n) ist eine Cauchyfolge. Dann gilt $y_n \to y$ für ein $y \in K$, es gilt ferner $\|y\| = \delta$.

Eindeutigkeit: Seien $x_1, x_2 \in K$ mit obiger Eigenschaft. Es gilt

$$\delta^2 \leq \left\|\tfrac{x_1+x_2}{2}\right\|^2 \leq \left\|\tfrac{x_1+x_2}{2}\right\|^2 + \left\|\tfrac{x_1-x_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x_2\|^2 \leq \delta^2,$$

d.h $\left\|\tfrac{x_1-x_2}{2}\right\|^2 = 0$ und $x_1 = x_2$. ∎

10.9. Lemma. Sei H ein Hilbertraum, Y abgeschlossener Unterraum, $x_0 \in H$ und $x \in H$ mit $\|x - x_0\| = \inf_{y\in Y} \|y - x_0\|$. Dann ist $x - x_0 \perp Y$.

Beweis. Angenommen die Behauptung falsch ist, existiert ein $y \in Y$ mit $\langle x - x_0, y\rangle = \beta \neq 0$. Sei $z := x_0 - x$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\overline{\beta} - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle = 0$. Es gilt

$$\|z - \lambda y\|^2 = \langle z - \lambda y, z - \lambda y\rangle = \|z\|^2 - \overline{\lambda}\beta - \lambda(\overline{\beta} - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle) = \|z\|^2 - \overline{\lambda}\beta,$$

Dann ist $\|z - \lambda y\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\|y\|^2} < \|z\|^2 = \delta^2$. Dies liefert aber einen Widerspruch, denn $z - \lambda y = x_0 - x - \lambda y$ und $x + \lambda y \in Y$. ∎

10.10. Satz. Sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H. Dann

$$H = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Beweis. $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ ist klarm denn $y \perp y$ impliziert $y = 0$. Der Raum Y ist abgeschlossen und natürlich konvex, also existiert nach dem Projektionssatz für alle $x \in H$ ein $y \in Y$ mit $x = y + z$ und $z \in Y^{\perp}$ (siehe Lemma 10.9). ∎

10.11. Bemerkung. Die Darstellung $x = y + z$ definiert eine Abbildung $P : H \to Y$, $x \mapsto y = Px$. Der Operator P ist linear und heißt die *Orthogonalprojektion* von H auf Y. P ist beschränkt und *idempotent*, d.h. $P^2 = P$. Die Linerität von P zeigt man zum Beispiel so: Für $x, y \in H$ und $z \in Y$ gilt $x - Px, y - Py \in Y^{\perp}$ und damit

$$\begin{aligned}\|(x+y) - z\|^2 &= \|(x - Px + y - Py) + (Px + Py - z)\|^2 \\ &\overset{\text{Pyth.}}{=} \|x - Px + y - Py\|^2 + \|Px + Py - z\|^2 \geq \|x + y - (Px + Py)\|^2.\end{aligned}$$

Dies gilt auch für $z = P(x+y)$, welches den Abstand $\operatorname{dist}((x+y), Y)$ minimisiert. Wir sheen also $P(x+y) = Px + Py$. Sei jetzt $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in H$. Analog geht man vor:

$$\|\lambda x - z\|^2 = \|\lambda x - \lambda Px + \lambda Px - z\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \|\lambda x - \lambda Px\|^2 + \|\lambda Px - z\|^2 \geq \|\lambda x - \lambda Px\|^2,$$

gilt für alle $z \in Y$. Dies liefert $P(\lambda x) = \lambda Px$.

Beweis zum Idempotenz von P: für jedes $x \in H$ gilt $Px \in Y$, d.h. $\operatorname{dist}(Px, Y) = 0$, und somit $PPx = Px$. Die Beschränktheit von P folgt mit dem Satz von Pythagoras: Es gilt $\|Px\|^2 \leq \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$, und somit $\|P\| \leq 1$. Bemerke noch, dass $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$, und damit entwede $P = 0$ oder $\|P\| = 1$.

10.12. Theorem [Rieszscher Darstellungsatz]. Sei H ein Hilbertraum. Dann existiert zu $\varphi \in H'$ genau ein $z \in H$ mit

$$\varphi(x) = \langle x, z\rangle \qquad \text{für alle } x \in H.$$

Weiter gilt $\|\varphi\| = \|z\|$.

Beweis. *Existenz:* Für $\varphi = 0$ wähle $z = 0$. Sei also im Weiteren $\varphi \neq 0$. Der Raum $\ker \varphi$ ist in H abgeschlossen, und es gilt $\ker \varphi \neq H$, also enthält $(\ker \varphi)^{\perp}$ ein $z_0 \neq 0$. Für $x \in H$ setze $y := \varphi(x)z_0 - \varphi(z_0)x$. Dann gilt $\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(z_0) - \varphi(z_0)\varphi(x) = 0$, d.h. $y \in \ker \varphi$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 = \langle y, z_0\rangle &= \langle \varphi(x)z_0 - \varphi(z_0)x, z_0\rangle = \varphi(x)\langle z_0, z_0\rangle - \varphi(z_0)\langle x, z_0\rangle \\ \Longrightarrow \quad \varphi(x) &= \frac{\varphi(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}\langle x, z_0\rangle \quad \text{für jedes } x \in H,\end{aligned}$$

und $z := \frac{\overline{\varphi(z_0)}}{\langle z_0, z_0\rangle} z_0$ ist der gewünschte Vektor.

Eindeutigkeit: Seien $z_1, z_2 \in H, \varphi(x) = \langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle$ für alle $x \in H$. Dann gilt $z_1 - z_2 \in H^{\perp} = \{0\}$.

Die Norm: Der Fall $\varphi = 0$ ist klar. Da $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \varphi(z) \leq \|\varphi\|\|z\|$ gilt, so erhalten wir $\|z\| \leq \|\varphi\|$. Umgekehrt: $|\varphi(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|x\|\|z\| \Longrightarrow \|\varphi\| \leq \|z\|$. Zusammenfassend ist $\|\varphi\| = \|z\|$. ∎

10.13. Bemerkung.

(a) Theorem 10.12 kann auch so formuliert werden: die Abbildung $\Phi : H \to H'$, $\Phi(x) := \langle \cdot, x\rangle$ ist bijektiv, isometrisch und *konjugiert linear*, d.h. $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ und $\Phi(\alpha x) = \overline{\alpha}\Phi(x)$ für alle $x, y \in H$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) Als Konsequenz erhalten wir die Reflexivität eines Hilbertraums.

10.14. Definition. Sei $a : H \times H \to \mathbb{K}$ eine *Sesquilinearform*, d.h. es gelten:

- $a(x+y,z) = a(x,z) + a(y,z)$
- $a(x,y+z) = a(x,y) + a(x,z)$
- $a(\alpha x,y) = \alpha a(x,y)$
- $a(x,\alpha y) = \overline{\alpha} a(x,y)$ (komplexe Konjugierung nur falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Dann heißt a

(a) *stetig*, falls $\exists M > 0$ mit $|a(x,y)| \le M\|x\|\|y\|$ für alle $x,y \in H$.

(b) *koerziv*, falls $\exists \alpha > 0$ mit $\mathrm{Re}\, a(x,x) \ge \alpha\|x\|^2$ für alle $x \in H$.

Bemerkung: In der Vorlesung war die Definition nur mit $a(x,x) \ge \alpha\|x\|^2$ formuliert.

10.15. Theorem [Lax–Milgram]. Sei $a : H \times H \to \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform auf einem Hilbertraum H. Es existiert genau eine bijektive Abbildung $A \in \mathscr{L}(H)$ mit

$$\langle x, Ay\rangle = a(x,y) \qquad \text{für alle } x,y \in H.$$

Desweiteren gilt $\|A\| \le M$ und $\|A^{-1}\| \le 1/\alpha$.

Beweis. Für $y \in H$ ist $a(\cdot,y) \in H'$ und $\|a(\cdot,y)\|_{H'} \le M\|y\|$. Nach dem Satz von Riesz 10.12 existiert ein eindeutiges Ay so, dass $a(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x \in H$ und $\|Ay\| = \|a(\cdot,y)\|_{H'} \le M\|y\|$ gelten. Wegen der Eindeutigkeit ist $y \mapsto Ay$ linear. Also $A \in \mathscr{L}(H)$ und $\|A\| \le M$.

$$\begin{aligned} A \text{ ist injektiv:}\quad & \alpha\|x\|^2 \le \mathrm{Re}\, a(x,x) = \mathrm{Re}\,\langle x, Ax\rangle \le |\langle x, Ax\rangle| \le \|x\|\|Ax\| \\ \Longrightarrow\quad & \|x\| \le \|Ax\| \\ \Longrightarrow\quad & \ker A = \{0\}. \end{aligned}$$

A ist surjektiv: Zunächst zeigen wir, dass $\mathrm{im}(A)$ abgeschlossen ist. Sei $Ax_n \to y$, dann $\|x_n - x_m\| \le 1/\alpha\|Ax_n - Ax_m\| \to 0$, d.h. x_n ist eine Cauchyfolge, also konvergiert (x_n) gegen ein $x \in H$. Aber dann muss $Ax_n \to Ax = y$ gelten, also $y \in \mathrm{im}(A)$. Nun beweisen wir $\mathrm{im}(A) = H$. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann existiert ein $0 \ne y \in \mathrm{im}(A)^\perp$, also

$$\alpha\|y\|^2 \le \mathrm{Re}\, a(y,y) = \mathrm{Re}\,\langle y, Ay\rangle = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. ∎

10.16. Definition [Orthonormalsystem]. Sei H ein Prähilbertraum. Eine Folge $(e_n) \subseteq H$ heißt *Orthogonalsystem*, falls $e_i \perp e_j$, $i \ne j$, und *Orthonormalsystem* (ONS) falls $\|e_i\| = 1$.

10.17. Satz [Besselsche Ungleichung]. Sei H ein Hilbertraum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in H. Dann gilt für alle $x \in H$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $x_N := x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$. Dann $x_N \perp e_j$ für $j = 1,\dots,N$. Also

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x_N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x_N\|^2 + \Big\|\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \Big\|x_N + \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 = \|x\|^2.$$

Nun lasse $N \to \infty$ um die Behauptung zu erhalten. ∎

10.18. Beispiel.

(a) Betrachte $L^2_{\mathbb{C}}((-\pi,\pi))$ und $e_k(t) := e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für $k \neq l$:

$$\langle e_k, e_l\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i(k-l)}\big(e^{i(k-l)\pi} - e^{-i(k-l)\pi}\big) = \frac{2}{k-l}\sin(k-l)\pi = 0,$$

d.h. $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Orthogonalsystem. Normierung:

$$\langle e_k, e_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi,$$

also ist $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_k)$ ein ONS.

(b) In ℓ^2 betrachte $e_k := (0,0,\dots,0,1,0\dots)$, wobei 1 in dem k-ten Koordinate steht. Dann ist (e_k) ein ONS in ℓ^2.

10.19. Satz [Gram–Schmidt–Verfahren]. Sei H ein Hilbertraum und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von H. Dann existiert ein ONS S mit $\overline{\operatorname{lin}} S = \overline{\operatorname{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Setze $e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Betrachte $e_2 := \frac{x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1\|}$, wegen linear Unabhängigkeit dürfen wir durch $\|x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1\| \neq 0$ dividieren. Es gilt ferner $e_1 \perp e_2$. Analog geht es weiter:

$$e_{k+1} := \frac{x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle x_k, e_i\rangle e_i}{\big\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle x_k, e_i\rangle e_i\big\|}.$$

So definiert man induktiv $S := \{e_1, e_2, \dots\}$, und man sieht, dass S ein ONS ist. Da $x_n \in \operatorname{lin} S$ und $e_n \in \operatorname{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$, gilt auch $\overline{\operatorname{lin}} S = \overline{\operatorname{lin}}\{x_1, x_2, \dots\}$. ∎

10.20. Beispiel.

(a) Die Anwendung des Gram–Schmidt–Verfahrens auf $\{1, t, t^2, \dots\}$ in $L^2([-1,1])$ liefert die *Legendre-Polynome*:

$$e_n(t) = \sqrt{n + \tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^n (t^2-1)^n.$$

(b) Betrachte den Raum $L^2([-1,1], (1-t^2)^{-1/2})$, wobei

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Das Gram–Schmidt-Verfahren angewandt auf $\{1, t, t^2, \dots\}$ ergibt die Chebyshev–Polynome:

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2^{2n-1}}{\pi}}\,2^{-n+1}\cos(n\arccos t).$$

(c) Betrachte den Raum $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2/2})$, wobei

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g}(t)e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Das Gram–Schmidt-Verfahren angewandt auf $\{1, t, t^2, \dots\}$ ergibt die Hermite–Polynome.

10.21. Definition.

(a) Sei X ein normierter Vektorraum. Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt eine *Schauder-Basis* in X, falls für alle $x \in X$ genau eine Folge $(\alpha_n) \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \to x$ existiert (oder X ist endlichdimensional und (x_n) ist eine algebraische Basis in X).

(b) Sei H ein Hilbertraum und $(e_n) \subseteq H$ ein Orthonormalsystem. Ist (e_n) ein Schauderbasis, dann heißt (e_n) *Orthonormalbasis.*

Bemerkung: Man kann auch überabzählbare Orthonormalbasen auch definieren.

10.22. Satz. Sei H ein Hilbertraum und (e_n) ein Orthonormalsystem in H. Äquivalent sind:

(a) (e_n) ist eine Orthonormalbasis in H

(b) $\operatorname{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in H

(c) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ für alle $x \in H$.

(d) $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$ für alle $x, y \in H$.

(e) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ für alle $x \in X$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Definition.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $x \in H$ und $x_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_{ni} e_i \to x$. Sei $N > N_n$. Dann gilt

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i\Big\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_N\}) \le \operatorname{dist}(x, \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_{N_n}\}) \le \|x - x_n\| \to 0.$$

(c) $\Rightarrow$ (d): Stetigkeit von $\langle \cdot, y\rangle$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Setze $y = x$.

(e) $\Rightarrow$ (c): $\Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \Big|\Big\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j\Big\rangle\Big|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle|^2 + \sum_{n+1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \to 0.$

(c) $\Rightarrow$ (a): Es ist nur die Eindeutigkeit der Darstellung zu beweisen. Falls $0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ gilt, gilt auch

$$0 = \Big\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i, e_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha_i e_i, e_j\rangle = \alpha_j.$$

■

10.23. Beispiel.

(a) Trigonometrische Polynome in $L^2([-\pi, \pi])$ formen eine ONB.

(b) Normierte Legendre-Polynome in $L^2([-1, 1])$ formen eine ONB.

10.24. Korollar. Jeder separable Hilbertraum H besitzt eine Orthonormalbasis. Falls H separabel und unendlichdimensional ist, so ist H isometrisch isomorph zu ℓ^2.

Beweis. (a) Sei $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in H und $H_n := \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sei P_n die Orthogonalprojektion auf H_n. Setze $\widetilde{e}_n := x_n - P_{n-1} x_n$, $N := \{n \in \mathbb{N} : \widetilde{e}_n \neq 0\}$ und $e_n := \widetilde{e}_n / \|\widetilde{e}_n\|$ für $n \in N$ und $e_n := 0$ sonst. Dann $e_n \in H_n \cap H_{n-1}^{\perp}$, also ist $(e_n)_{n \in N}$ ein Orthonormalsystem. Da $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots e_n\} = H_n$, folgt die Dichtheit von $\operatorname{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in H, also ist $(e_n)_{n \in N}$ eine Orthonormalbasis.

(b) Sei $\dim H = \infty$ und (e_n) eine ONB. Dann gilt für alle $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$. Betrachte $\Phi : H \to \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_{\ell^2} = \langle x, y\rangle$ und Φ ist eine bijektive, lineare Isometrie. ■

10.25. Bemerkung. Jeder Hilbertraum H besitzt eine Orthonormalbasis (nicht unbedingt abzählbar!), d.h. eine dichte Teilmenge $S \subseteq H$ mit $x \perp y$ für $x, y \in S$, $x \neq y$ und $\|x\| = 1$.

Beweis. Idee: verwende Zorn-Lemma um ein maximales ONS zu erhalten. Dies wird eine ONB sein. ∎