§ 9 L_p Räume bezüglich des Lebesgue-Maßes

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und $\mathcal{M}$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

9.1. Satz.

(a) Sei $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt ferner $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

(b) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, so existiert

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^d.$$

Desweiteren gilt $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Beweis. (a) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt mit der Verwendung des Satzes von Fubini-Tonelli:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \|f\|_1\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Dies impliziert alle Aussagen.

(b): Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ so erhält man nach der Hölder-Unleichung:

$$|f * g(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Dies zeigt die Existenz von $f * g(x)$ für jedes x, und die übrigen Aussagen folgen auch. ∎

9.2. Satz. Der Raum $L^1(\mathbb{R}^d)$ versehen mit der Multiplikation $f * g$ (Faltung) ist eine kommutative Banachalgebra.

Beweis. Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Man rechnet leicht nach, dass $(f+\lambda g)*h = f*f+\lambda(g*h)$, $f*(g*h) = (f*g)*h$ und $f * g = g * f$ gelten. Die Submultiplikativität der Norm wurde im Satz 9.1 (a) bewiesen. ∎

9.3. Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass die Banachalgebra $L^1(\mathbb{R}^d)$ kein Einselement besitzt.

9.4. Satz. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $R > 0$, so dass $\|f - \chi_{B(0,R)} f\|_p \leq \varepsilon$. Ferner existiert eine Treppenfunktion φ mit $\|\chi_{B(0,R)} f - \chi_{B(0,R)}\varphi\|_p \leq \varepsilon$ (siehe Lemma 8.11). Die Funktion $\chi_{B(0,R)}\varphi$ hat die Form $\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Wir zeigen, dass jede einzelne χ_{A_i} durch Funktionen in $C_c(\mathbb{R}^d)$ approximierbar ist. Wähle eine beschränkte, offene Menge G und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset G$ und $\lambda_d(G \setminus K) \leq \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma von Urysohn ein $\psi \in C_c(G)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d = \int\limits_G |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d = \int\limits_{G\setminus K} |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d + \underbrace{\int\limits_K |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d}_{=0} \leq 2^p\lambda(G \setminus K) \leq 2^p\varepsilon.$$

∎

9.5. Satz. Für $x_0 \in \mathbb{R}^d$ betrachte die Abbildung $(S_{x_0}f)(x) = f(x+x_0)$. Dann ist $S :_{x_0}: L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ ein stetiger, linearer Operator mit $\|S_{x_0}\| = 1$. Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p < \infty$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $|x_0| \le \delta$ gilt $\|S_{x_0}f - f\|_p \le \varepsilon$.

Beweis. Die Aussage ist klar für $f \in C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$, und $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$. ∎

9.6. Definition. Eine Folge $(\rho_n)_{n\ge 1}$ von Funktionen mit den Eigenschaften

(a) $\rho_n \ge 0$ (b) $\|\rho_n\|_1 = 1$ (c) $\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,r)} \rho_n = 1 \;\forall\, r > 0$

heißt *approximative Einheit* oder *Mollifier.*

9.7. Beispiel. Betrachte $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$, $\rho \ge 0$, $\int \rho = 1$, und definiere $\rho_n(x) := n^d\rho(nx)$.

9.8. Satz. Sei $(\rho_n)_{n\ge1}$ eine approximative Einheit. Dann gilt $\|\rho_n * f - f\|_1 \to 0$. D.h. die Banachalgebra besitzt zwar kein Einselement, aber eine approximative Einheit.

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $\|S_y f - f\|_1 \le \varepsilon$ für $|y| \le \delta$. Also

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{B(0,\delta)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\delta)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * f)(x) - f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_{B(0,\delta)} \rho_n(y) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\delta)} \rho_n(y)\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\le \varepsilon \int_{B(0,\delta)} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\delta)} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y \le 2\varepsilon\end{aligned}$$

für genügend großes n. ∎

9.9. Satz [Hausdorff-Young-Ungleichung]. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. So existiert $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, und es gilt $\|f*g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1$.

Beweis. Sei $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nach dem Satz von Fubini und Satz 9.1(b)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} h(x) \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)h(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \|g\|_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|h\|_q.$$

Daraus folgt die Behauptung (siehe Korollar 8.13(c)). ∎

9.10. Satz. Sei $f \in L^p$, $g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$. So gilt $f * g \in BUC(\mathbb{R}^d)$ und sogar $f*g \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$. Es gilt

$$\begin{aligned}|f*g(x) - f*g(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)g(z) - f(y-z)g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-z) - f(y-z)| \cdot |g(z)|\,\mathrm{d}z \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \|S_{x-y}f - f\|_p \cdot \|g\|_q \le \varepsilon,\end{aligned}$$

falls $|x-y| \le \delta$ (siehe Satz 9.5). Somit ist $f*g \in BUC(\mathbb{R}^d)$ bewiesen. Nun sei $r>0$ so groß, dass $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} |f|^p < \varepsilon^p$ und $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} |g|^q < \varepsilon^q$. So gilt für $|x| > 2r$ die Ungleichung $|x-y| > r$ für $y \in B(0,r)$, und somit auch

$$|f*g(x)| \le \int\limits_{B(0,r)} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\le} \varepsilon\|f\|_p + \varepsilon\|g\|_q.$$

D.h., für großes $|x|$ gilt $|f*g(x)| \le \varepsilon$, also wurde $f*g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ gezeigt. ■

9.11. Satz. Sei $(\rho_n)_{n\ge1}$ eine approximative Einheit. Dann gilt $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.

Beweis. Argumentiere wie im Beweis des L^1-Fall mit der zusätzlicher Verwendung von $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ wie im Beweis von Satz 9.9 ■

Folgenden Satz könnte man auch zum Beweis des letzten Satzes benutzen.

9.12. Theorem [Riesz–Thorin Konvexitätstheorem]. Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \qquad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha}, L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0}, L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1}, L^{r_1})}.$$

Beweis. Benutzt komplexe Analysis und ist technisch. ■

Ein einfacher Fall des Satzes von Riesz-Thorin lässt sich durch die Hölder-Ungleichung beweisen.

9.13. Satz [L^p Interpolationsungleichung]. Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(X,\mu)$ und es gilt

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Beweis. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(X,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(X,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \le \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. ■