

§ 8 L_p Räume I.

In diesem Abschnitt sei (X, \mathcal{M}, μ) stets ein Maßraum.

8.1. DEFINITION.

(a) Sei $1 \leq p < \infty$. Setze $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

(b) Sei $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ messbar. Dann heißt f *wesentlich beschränkt*, falls ein $\alpha > 0$ existiert mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Ferner heißt

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

das *wesentliche Supremum* von f .

(c) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Definiere

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu, \mathbb{K}) := \{f : f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

8.2. SATZ.

(a) \mathcal{L}^p ist ein Vektorraum.

(b) $\|f\|_p = 0$ gilt genau dann, wenn $f(x) = 0$ für fast alle $x \in X$, d.h., es gibt $N \in \mathcal{M}$, so dass $\mu(N) = 0$ und für alle $x \in X \setminus N$ gilt $f(x) = 0$.

(c) Sei $f \in \mathcal{L}^p$. Setze

$$\mathcal{N} := \{f : f \text{ messbar und } f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\} = \{f : f \text{ messbar und } \|f\|_p = 0\}.$$

Dann ist \mathcal{N} ein Unterraum von \mathcal{L}^p .

(d) μ -fast überall gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$.

Beweis. a) Für $p = \infty$: Sei $\beta > \|f\|_\infty$ und $\gamma > \|g\|_\infty$. So gelten

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(\{x \in X : |g(x)| > \gamma\}) = 0.$$

Es gilt $\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \beta\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \gamma\}$, und daher $\mu(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\}) = 0$. Dies zeigt $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Für $1 \leq p < \infty$: Die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^p$ ist konvex, d.h. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$. Daraus folgt

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_X |f|^p + |g|^p d\mu < +\infty \quad \text{für } f \in \mathcal{L}^p.$$

b), c), d): Klar. ■

8.3. SATZ. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist auf \mathcal{L}^p die Funktion $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm.

Beweis. Homogenität ist leicht zu sehen. Die Dreiecksungleichung für $p = \infty$ wurde im Satz 8.2 a) bewiesen. Für $p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung ein Resultat von Minkowski, siehe Satz 8.6. Zum Beweis benötigen wir ein paar Hilfssätze. ■

8.4. SATZ [Youngsche Ungleichung]. Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und für $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Es reicht $\log(ab) \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$ zu zeigen, welche Ungleichung sich als $\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$ schreiben lässt. Diese Ungleichung bedeutet aber die Konkavität von \log , was aber natürlich stimmt. ■

8.5. SATZ [Höldersche Ungleichung]. Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ (interpretiere $1/\infty = 0$). Desweiteren seien $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial, sowie der Fall $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$. Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in X$ ergibt nach Integration

$$\int_X |F(x)G(x)| \, d\mu(x) \leq \int_X \frac{|F(x)|^p}{p} \, d\mu(x) + \int_X \frac{|G(x)|^q}{q} \, d\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. ■

8.6. SATZ [Minkowskische Ungleichung]. Sei $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L^p(X, \mu)$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Bemerke $pq - q = p$ und verwende die Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p \, d\mu &\leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |f + g|^{pq-q} \, d\mu \right)^{1/q} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |f + g|^{pq-q} \, d\mu \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\int_X |f + g|^p \, d\mu \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nach Division mit dem rechten Term und $p - p/q = 1$. ■

8.7. BEMERKUNG.

(a) $\|\cdot\|_p$ ist nur eine Halbnorm auf \mathcal{L}^p . Denn sei $f \in \mathcal{L}^p$, es gilt $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn

$$f \in \mathcal{N} := \{g : g \text{ messbar und } g = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}.$$

(b) \mathcal{N} ist ein Unterraum von \mathcal{M} , dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von \mathcal{L}^p), und

$$f \sim g \stackrel{\text{Def}}{\iff} f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation.

Wir können äquivalente Funktionen miteinander identifizieren, d.h. den Faktorraum definieren.

8.8. DEFINITION. Der Raum L^p ist definiert durch:

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \quad \text{für alle } [f] \in L^\infty, \text{ die Äquivalenzklasse von } f.$$

8.9. SATZ.

- a) $L^\infty(X, \mu)$ ist ein Banachraum, und $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ genau dann, wenn eine Menge $N \in \mathcal{M}$ mit $\mu(N) = 0$ existiert, so dass $f_n(x) \rightarrow f(x)$ gleichmäßig auf $X \setminus N$.
- b) **[Riesz-Fischer]:** Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(X, \mu)$ vollständig.

Beweis. a) ÜA.

b) Sei $f_n \in L^p(X, \mu)$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p = M < \infty$. Nach Satz 1.11 genügt es zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^\infty f_j$ in L^p konvergiert. Setze $G_n := \sum_{j=1}^n |f_j|$ und $G := \sum_{j=1}^\infty |f_j|$. Dann $\|G_n\|_p \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Satz von monotoner Konvergenz ergibt

$$\int_X G^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X G_n^p d\mu \leq M^p.$$

Das heißt $G \in L^p(X, \mu)$ und $G(x) = \sum_{j=1}^\infty |f_j(x)| < \infty$ μ -fast überall, insbesondere konvergiert $F(x) := \sum_{j=1}^\infty f_j(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann $|F| \leq G$, daher $F \in L^p(X, \mu)$. Ferner

$$\left| F - \sum_{j=1}^n f_j \right|^p \leq (2G)^p \in L^1(X, \mu),$$

nach Satz von Lebesgue

$$\left\| F - \sum_{j=1}^n f_j \right\|_p^p = \int_X \left| F - \sum_{j=1}^n f_j \right|^p d\mu \rightarrow 0$$

8.10. SATZ. Sei $f_n \in L^p(X, \mu)$ eine konvergente Folge mit $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Dann existiert eine Teilfolge f_{n_k} , so dass $f_{n_k}(x)$ μ -fast überall gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis. (f_n) ist eine Cauchy-Folge, Zu $\varepsilon = 1/2^k$ wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $\|f_n - f_m\|_p \leq 1/2^k$ für alle $n, m \geq n_k$. Somit gilt $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 1/2^k$, und daher

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < +\infty.$$

Wie im Beweis vom Satz 8.9 b) beweist man, dass

$$\sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \quad \text{für fast alle } x \in X \text{ konvergiert.}$$

Da L^p vollständig ist, konvergiert diese Reihe auch in L^p , d.h.

$$f_{n_{m+1}}(x) - f_{n_1}(x) = \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \rightarrow g(x) \quad \text{für } m \rightarrow \infty,$$

für fast alle $x \in X$. Also $f_{n_m}(x) \rightarrow g(x) + f_{n_1}(x)$ fast überall ($m \rightarrow \infty$). Aus dem Beweis vom Satz 8.9 b), folgt $f_{n_m} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} g + f_{n_1}$, also $g + f_{n_1} = f$. Der Beweis ist fertig. ■

8.11. LEMMA. Die Treppenfunktionen liegen dicht in $L^p(X, \mu)$ für $q \leq p \leq \infty$.

Beweis. Im Falle $p = \infty$ ist das Resultat aus Maßtheorie bekannt. Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(X, \mu)$, sei $n \in \mathbb{N}$ und definiere

$$A_n := \left\{ x \in X : \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n \right\}.$$

So ist $\mu(A_n) < \infty$, und für genügend großes n gilt

$$\int_{X \setminus A_n} |f|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Approximiere die beschränkte Funktion $\chi_{A_n} f$ gleichmäßig auf A_n durch Treppenfunktionen $\chi_{A_n} g$, also $\|\chi_{A_n} f - \chi_{A_n} g\|_\infty \leq \varepsilon$. So gilt auch

$$\int_X |\chi_{A_n} f - \chi g|^p \, d\mu \leq \mu(A_n) \varepsilon^p,$$

die Behauptung folgt damit. ■

8.12. SATZ [Dualität]. Sei $1 \leq p < \infty$, und (X, \mathcal{M}, μ) σ -endlicher Maßraum. Sei $1/p + 1/q = 1$ (so genannte *konjugierte Exponenten*). Dann definiert $L^q(X, \mu) \rightarrow L^p(X, \mu)'$

$$J(g)f := \int_X f \cdot g \, d\mu, \quad g \in L^q(X, \mu), f \in L^p(X, \mu),$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Beweis. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(X, \mu)$ und setze $f := \frac{\bar{g}}{|g|} \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^{q/p}$. Dann

$$\|f\|_p = \int_X \left(\frac{|\bar{g}|}{|g|} \right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \, d\mu = 1$$

und $\int_X fg \, d\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(X) < \infty$: Sei $\varphi \in L^p(X, \mu)'$. Betrachte $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ ($\chi_A \in L^p(X, \mu)$). ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ , denn $A \in \mathcal{M}$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ -fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(X, \mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radon–Nikodým ergibt $g \in L^1(X, \mu)$ mit

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu = \int_X \chi_A g \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Also wegen Linearität $\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu$ für alle Treppenfunktionen f . Ferner $|\varphi(f)| \leq C' \|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(X, \mu)$, so gilt $\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu$ für alle $f \in L^\infty(X, \mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(X, \mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$(1) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \leq n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(X, \mu)$ und

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \, d\mu &= \int_X \chi_{A_n} fg \, d\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \leq \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \|\varphi\| \left(\int_{A_n} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|\varphi\| \left(\int_{A_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1/p} \\ &\implies \int_{A_n} |g|^q \leq \|\varphi\|^q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi (monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(X, \mu)$.

Jetzt betrachten wir den Fall $q = \infty$. Dann $|g| \leq \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in X : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(X, \mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int_A |g| \, d\mu = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\implies \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch zu $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(X, \mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(X, \mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(X) = \infty$: Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$ und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(X, \mu)$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$ für $f \in L^p(X_n, \mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(X_n, \mu_n)$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(X_n, \mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^\infty g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(X, \mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (1)

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \, d\mu &= \sum_{j=1}^n \int_{M_j} fg \, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \, d\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f\right) \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{j=1}^n \int_{M_j} |\chi_{M_j} f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \left(\int_{A_n} |g|^q \, d\mu\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\int_{A_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\varphi\|^p$, und nach dem Satz von Beppo Levi $g \in L^q(X, \mu)$. Es gilt:

$$\varphi(f) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} f\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} fg \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \chi_{A_n} fg \, d\mu \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_M fg \, d\mu.$$

■

8.13. KOROLLAR.

- a) Für $1 < p < \infty$ ist L^p reflexiv.
- b) L^∞ und L^1 sind im Allgemeinen nicht reflexiv.
- c) Es gilt $\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fg \, d\mu : g \in L^q(X, \mu)\right\}$.