§ 7 Der Dualraum von $C(K)$

Unser Ziel ist es konkrete Darstellungen für den Dualraum von $C(K)$ zu finden, wobei K immer einen kompakten, metrischen (topologischen Raum) bezeichnet.
Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Fall $K = [0,1]$.

7.1. Riemann-Stieltejes Integral

Sei $f \in C[0,1]$ und $g \in BV[0,1]$. Im Folgenden werden wir Unterteilungen $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ des Intervalls $[0,1]$ betrachten mit $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$. Betrachte eine verfeinernde Folge P_k von Unterteilungen, so dass $\max\{t_{i+1}^k - t_i^k : i = 1, \ldots, n^k\} \to 0$ für $k \to \infty$. Diese Eigenschaft werden wir mit der Bezeichnung "$P_k \to 0$" notieren. Zu einer Unterteilung P betrachte die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(t_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i)).$$

Man kann leicht zeigen (wegen $f \in C[0,1]$ und $g \in BV[0,1]$), dass für $P_k \to 0$ der Grenzwert obiger Summen existiert, und dass der Limes von der Wahl der Folge von Unterteilungen unabhängig ist. Wir setzen

$$\int_0^1 f \,\mathrm{d}g := \lim_{P_k \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} f(t_i^k)(g(t_{i+1}^k) - g(t_i^k)).$$

7.2. Satz. Die folgenden Aussagen gelten:

a) Für $f_1, f_2 \in C[0,1]$, $g \in BV[0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 (f_1 + \lambda f_2)\,\mathrm{d}g = \int_0^1 f_1 \,\mathrm{d}g + \lambda \int_0^1 f_2 \,\mathrm{d}g$

b) Für $f \in C[0,1]$, $g_1, g_2 \in BV[0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 f \,\mathrm{d}(g_1 + \lambda g_2) = \int_0^1 f \,\mathrm{d}g_1 + \lambda \int_0^1 f \,\mathrm{d}g_2$

c) Für $f \in C[0,1]$ gilt $\int_0^1 f \,\mathrm{d}\mathbf{1} = 0$, $\int_0^1 f \,\mathrm{d}(\mathrm{id}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Ist $g \in C^1[0,1]$ so ist $g \in BV[0,1]$ und es gilt $\int_0^1 f \,\mathrm{d}g = \int_0^1 f(x) g'(x)\,\mathrm{d}x$

e) Für $f, g \in C[0,1] \cap BV[0,1]$ gilt $\int_0^1 f \,\mathrm{d}g = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 g \,\mathrm{d}f$.

Beweis. Leicht. ∎

7.3. Satz. Für $g \in BV[0,1]$ definiere

$$\varphi_g(f) = \int_0^1 f \,\mathrm{d}g.$$

Dann ist $\varphi_g \in (C[0,1])'$ mit $\|\varphi_g\| = V_0^1 g$.

Beweis. Linearität ist klar. Betrachte eine Unterteilung P_k des Intervalls $[0,1]$. Es gilt

$$\Big|\sum_{i=0}^{\infty} f(t_i^k)(g(t_{i+1}^k) - g(t_i^k))\Big| \le \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n} \big|g(t_{i+1}^k) - g(t_i^k)\big| \le \|f\|_\infty V_0^1 g,$$

und daher $\left|\int_0^1 f \,\mathrm{d}g\right| \le V_0^1 g \cdot \|f\|_\infty$. Also $\|\varphi_g\| \le V_0^1 g$. Die Gleicheit kann man hier auch zeigen. ∎

7.4. Satz. Sei $\varphi \in (C[0,1])'$. Dann existiert ein $g \in BV[0,1]$, so dass

$$\text{für alle } f \in C[0,1] \text{ gilt} \quad \varphi(f) = \int_0^1 f \, \mathrm{d}g.$$

Ferner gilt $\|\varphi\| = V_0^1 g$.

Beweis. ■

Nun wollen wir eine alternative Darstellung von $C[0,1]$ finden, die auch im allgemeinen Fall von K verwendet werden kann. Dazu ein bisschen Maßtheorie: Im Folgenden sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum, also X nicht leere Menge, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra.

Erinnerung:

Definition: Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *σ-Algebra* (über X), falls gilt:

i) $X \in \mathcal{M}$

ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$

iii) $A_j \in \mathcal{M}$ für $j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$

Definition: Eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ heißt *Maß* (auf $\mathcal{M}$), falls

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k \Longrightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

7.5. Definition.

a) Eine σ-additive Funktion $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ heißt *signiertes Maß.*

b) Eine σ-additive Funktion $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ heißt *komplexes Maß.*

Wir werden die Untersuchungen auf signierte Maße einschränken. In dem komplexen Fall braucht man manchmal weitere Überlegungen. Oft hilft die folgende Idee: ist μ ein komplexes Maß so sind Re μ und Im μ signierte Maße, und trivialerweise gilt $\mu = \text{Re}\,\mu + i\text{Im}\,\mu$.

7.6. Lemma.

a) Die (endlichen) signierten Maße bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Ein signiertes Maß kann nicht beide Werte $-\infty$ und $+\infty$ annehmen.

c) Ist $A, B \in \mathcal{M}$ und $B \subseteq A$, so gelten

$$\mu(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) < +\infty; \qquad \text{und} \quad \mu(A) > -\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) > -\infty.$$

Beweis. Folgen aus Additivität signierter Maße. ■

7.7. Satz [Hahn-Zerlegung]. Für ein signiertes Maß μ existieren $N, P \in \mathcal{M}$ mit $X = N \cup P$ und $N \cap P = \emptyset$, so dass für alle $A \in \mathcal{M}$

$$\mu(A \cap P) \geq 0 \quad \text{und} \quad \mu(A \cap N) \leq 0 \quad \text{gelten.}$$

Beweis. Wir nennen eine Menge A *negativ*, falls für alle $B \subseteq A$ die Ungleichung $\mu(B) \leq 0$ gilt.
Schritt 1. Ist $\mu(A) < 0$ so existiert eine negative Menge $A' \in \mathcal{M}$, $A' \subseteq A$ mit $\mu(A') \leq \mu(A)$. Zum Beweis dieser Behauptung: Sei $k_1 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, so dass eine Menge $A_1 \subseteq A$ existiert mit $\mu(A_1) \geq 1/k_1$. Falls es keine solche Zahl gibt, dann ist $A' = A$ eine passende Wahl. Es gilt $\mu(A \setminus A_1) \leq \mu(A)$.
Schritt 2. Man geht analog vor: Für die Menge $A \setminus A_1$ verwenden wir Schritt 1., und erhalten k_2 und A_2 mit $\mu(A \setminus A_1 \setminus A_2) \leq \mu(A)$ und $\mu(A_2) \geq 1/k_2$. Rekursiv findet man A_n und $k_n \in \mathbb{N}$. Die Konstruktion kann in endlich vielen enden, also wir finden z.B. kein k_n mehr. In diesem Fall, ist $A' := A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ eine passende Wahl.
Schritt 3. Falls die Rekursion nicht endet, gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < +\infty,$$

denn $\mu(A) \leq 0 < +\infty$, und so gil nach Lemma 7.6(c) $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < +\infty$. Es folgt $k_n \to \infty$ für $n \to \infty$.
Schritt 4. Wir setzen $A' := A \setminus \bigcup_n A_n$. Die Menge A' hat die gewünschten Eigenschaften. Denn: sei indirekt $B \subseteq A'$ mit $\mu(B) > 0$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(B) \geq 1/k$. Für genügend großes n gilt aber $k_n > k$. Dies ist ein Widerspruch mit der Wahl von k_n als kleinste natürliche Zahl, denn $B \subseteq A \setminus A_1 \setminus \dots \setminus A_{n-1}$.
Schritt 5. OBdA: μ nimmt den Wert $-\infty$ nicht an. Setze

$$\alpha := \inf_{A \text{ negativ}} \mu(A).$$

Betrachte eine steigende Folge A_n von negativen Mengen mit $\mu(A_n) \to \alpha$. Die Menge $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist auch negativ, denn für $N' \subseteq N$ gilt $\mu(N') = \lim_{n\to\infty} \mu(N' \cap A_n) \leq 0$. Es gilt ferner $\mu(N) = \alpha \leq 0$. Somit auch $\alpha > -\infty$.
Definiere $P := X \setminus N$. Diese Menge und N haben die gewünschten Eigenschaften. Denn sei $A \in \mathcal{M}$, falls $\mu(A \cap P) < 0$ gelten würde, so hätten wir nach Schritt 1. eine negative Menge $A' \subseteq A \cap P$, mit $\mu(A') \leq \mu(A \cap P) < 0$. So wäre auch $N \cup A'$ negativ mit $\mu(N \cup A') = \mu(N) + \mu(A') < \alpha$: ein Widerspruch mit der Minimalität von α. ■

7.8. Satz [Jordan-Zerlegung]. Setzen

$$\mu_+(A) := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A\} \quad \text{und} \quad \mu_-(A) := -\inf\{\mu(B) : B \subseteq A\}$$

Dann Sind μ_+ und μ_- positive Maße und μ läßt sich als $\mu = \mu_+ - \mu_-$ zerlegen.

Beweis. Betrachte $X = N \cup P$, die Hahn-Zerlegung. Wir zeigen $\mu_+(A) = \mu(A \cap P)$ (analog gilt $\mu_-(A) = \mu(A \cap N)$). Somit wird auch die Behauptung folgen. Es gilt $A \cap P \subseteq A$, und daher $\mu(A \cap P) \leq \mu_+(A)$. Andererseits gilt $\mu(B) = \mu(B \cap P) + \mu(B \cap N) \leq \mu(B \cap P) \leq \mu(A \cap P)$, damit $\mu_+(A) \leq \mu(A \cap P)$. ■

7.9. Definition.

a) Für ein signiertes Maß betrachte die Jordan-Zerlegung und setze $\tau := \nu_+ + \nu_-$. Dann ist τ ein positives Maß und heißt die *totale Variation* von ν.

b) Sei μ einsigniertes Maß und betrachte seine Jordan-Zerlegung $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Das Integral e meßbaren Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f \, d\mu_+ - \int_X f \, d\mu_-,$$

falls auf der rechten Seite nich $\infty - \infty$ steht.

7.10. Theorem [Riesz]. Sei $\emptyset \neq K$ ein kompakter, metrischer Raum, und $\varphi \in (C(K))'$. Dann existiert eindeutig ein endiches, reguläres, signiertes Borel-Maß, mit

$$\varphi(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } f \in C(K).$$

Um dies zu zeigen, betrachten wir eine allgemeinere Situation. Dazu benötigen wir den Begriff eines σ-Rings.

7.11. Definition.

a) Sei X eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften:

   i) $A_n \in \mathcal{R} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

   ii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

   So heißt $\mathcal{R}$ *σ-Ring.*

b) σ-Additivität hat die selbe Bedeutung wie auf σ-Algebren.

c) Ein Mengensystem $\mathcal{H}$ heißt Halbring, falls

   i) $\emptyset \in \mathcal{H}$

   ii) $A, B \in \mathcal{H} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$.

   iii) $A, B \in \mathcal{H} \Longrightarrow$ es existieren $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$ mit $A \cup B = C_1 \cup \cdots \cup C_n$

7.12. Theorem [Daniell–Stone]. Sei $X \neq \emptyset$ und F ein Vektorraum reellwertiger Funktionen auf X, so dass für $f, g \in F$ auch $f \wedge g \in F$ und $f \wedge \mathbf{1} \in F$. Bezeichne mit $\mathcal{R}_F$ den von den Mengen $\{x \in X : f(x) > 1\}$, $f \in F$ generierten σ-Ring. Sei $\Phi : F \to \mathbb{R}$ ein *positives* (d.h. $\Phi f \geq 0$ falls $f \geq 0$), lineares Funktional mit der Eigenschaft $\Phi f_n \to 0$ für $f_n \downarrow 0$. Es existiert ein Maß μ auf $\mathcal{R}_F$ so, dass $\Phi f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

Zum Beweis benötigen wir zwei, aus der Maßtheorie wohl bekannte Lemmata (siehe Konstruktion des Lebesgue-Maßes).

7.13. Lemma. Es seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \leq b_n$ so, dass $[a_n, b_n) \cap [a_k, b_k) = \emptyset$, falls $n \neq k$, und $[a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n)$. Dann $b - a = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$.

7.14. Lemma. Alle σ-additiven, positiven, finiten Funktionen auf einem Halbring $\mathcal{H}$ können (eindeutig) zu dem von $\mathcal{H}$ generierten σ-Ring fortgesetzt werden.

Beweis. *1. Schritt:* Definiere das Intervall $[f, g) := \{(x, t) \in X \times Y : f(x) \leq t < g(x)\}$. Setze $\mathcal{H} := \{[f, g) : f, g \in F,\ f \leq g\}$. Dann ist $\mathcal{H}$ ein Halbring, denn:
Sei $A, B \in \mathcal{H}$. Es ist $A \cap B \in \mathcal{H}$ zu zeigen; wenn $A = [f_1, g_1)$, $B = [f_2, g_2)$, dann ist $A \cap B = [f_1 \vee f_2, g_1 \wedge g_2)$ ($f_1 \vee f_2 \in F$ wegen Linearität und Voraussetzung). Ist $A \subseteq B$, dann gilt $B \setminus A = [f_2 \vee g_1, g_2) \cup [f_2, g_2 \wedge f_1)$. Wir haben jetzt gezeigt, dass $\mathcal{H}$ ein Halbring ist.

2. Schritt: Setze $\nu : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $\nu([f, g)) := \Psi(g - f)$. Wir zeigen, dass ν wohldefiniert (trivial) und σ-additiv ist. Es seien $[f_n, g_n)$ paarweise disjunkt und $[f, g) = \bigcup_n [f_n, g_n)$. Dann gilt auch für jedes x

$$[f(x), g(x)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n(x), g_n(x)).$$

Nach dem obigen Lemma folgt $g - f = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - f_n)$. Setze $h_m = g - f - \sum_{n=1}^{m} (g_n - f_n)$, also gilt $h_n \downarrow 0$, und nach Voraussetzung $\Phi h_n \to 0$. Folglich gilt

$$\nu([f, g)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu([f_n, g_n)).$$

Nach dem zweiten Lemma existiert ein σ-additives Maß $\widetilde{\nu}$. Sei $0 \le f \in F$. Für $f_n := (n(f - f \wedge \mathbf{1})) \wedge \mathbf{1}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$[0, af_n) \subseteq [0, af_{n+1}) \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, af_n) = \{x \in X : \, f(x) > 1\} \times [0, a).$$

Definiere $\mu(A) := \widetilde{\nu}(A \times [0,1))$ für $A \in \mathcal{R}_F$. Dann ist μ ein Maß mit der Eigenschaft

$$\widetilde{\nu}(\{x \in X : \, f > 1\} \times [0, a)) = a\mu(\{x \in X : \, f > 1\}).$$

Setze $A_i^n = \{x \in X : \, i^{-1}2^n f(x) > 1\}$ für $1 \le i \le n2^n$ und $A_{n2^n+1}^n = \emptyset$ und

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n2^n} (A_i^n \setminus A_{i+1}^n) \times [0, i2^{-n}).$$

Es gilt dann $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0, f)$, folglich

$$\Psi f = \widetilde{\nu}([0, f)) = \lim_{n \to \infty} \widetilde{\nu}(B_n) = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

■

7.15. Lemma [Satz von Dini]. Sei $f_n \in C(K)$ mit $f_n \downarrow 0$ punktweise. Dann konvergiert f_n gegen 0 gleichmäßig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und für jedes $x \in K$ ein $n_x \in \mathbb{N}$ gewählt mit $f_n(x) < \varepsilon$ für jedes $n \ge n_x$. Da f_n stetig ist gilt diese Ungleichung sogar in einer offenen Umgebung U_x von x, also $f_n(y) < \varepsilon$ für jedes $n \ge n_x$ und $y \in U_y$. Die Menge K ist kompakt, also gibt es $x_1, \dots, x_k \in K$, so dass $K = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Sei jetzt $n_0 := \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_k}\}$ und $y \in K$ beliebig. Dann gilt $y \in U_{x_j}$ für ein $1 \le j \le k$. Daher $f_n(y) \le f_{n_j}(y) < \varepsilon$ für $n \ge n_0 \ge n_j$, wobei wir die Monotonie der Folge (f_n) ausgenutzt haben. Wir haben gezeigt $\|f_n\| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$, der Beweis ist fertig. ■

Beweis von dem Rieszschen Darstellungssatz. (Nur der reelle Fall.) Ein Borel Maß μ ergibt ein stetiges lineares Funktional φ durch $\varphi_\mu(f) := \int_K f \, \mathrm{d}\mu$, denn die Linearität ist trivial und

$$\begin{aligned} |\varphi_\mu(f)| &= \Big| \int_K f \, \mathrm{d}\mu_+ - \int_K f \, \mathrm{d}\mu_- \Big| \le \int_K |f| \, \mathrm{d}\mu_+ + \int_K |f| \, \mathrm{d}\mu_- \\ &\le \|f\|_\infty (\|\mu_+\| + \|\mu_-\|). \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei erst φ ein positives Funktional. Es sei $C(K) \ni f_n \downarrow 0$. Nach Satz von Dini gilt $f_n \to 0$ auch gleichmäßig. Das heißt, die Bedingungen von Theorem 7.12 für $F = C(K)$ und $\Phi = \varphi$ sind erfüllt, also existiert ein μ auf $\mathcal{R}_F$ mit $\varphi(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$. Da $K \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ ist (denn $\mathbf{1} \in C(K) = \mathcal{F}$), stimmt $\mathcal{R}_F$ mit der Borel σ-Algebra überein.
Nun beweisen wir den allgemeinen Fall, d.h. φ ist beliebig. Setze $\varphi_+(f) = \sup\{\varphi(g) : g \le f\}$ für $f \ge 0$. Dann gilt für $f, g \ge 0$

$$\begin{aligned} \varphi_+(f+g) &= \sup\{\varphi(h) : 0 \le h \le f+g\} = \sup\{\varphi(h_1 + h_2) : 0 \le h_1 \le f, \, 0 \le h_2 \le g\} \\ &= \sup\{\varphi(h_1) : 0 \le h_1 \le f\} + \sup\{\varphi(h_2) : 0 \le h_2 \le g\} = \varphi_+(f) + \varphi_+(g). \end{aligned}$$

Wir haben hier benutzt, dass $0 \le h \le f + g$ die Existenz von $0 \le h_1 \le f$ und $0 \le h_2 \le g$ mit $h = h_1 + h_2$ impliziert. Definiere jetzt $\varphi_+(f)$ für beliebige $f \in C(K)$ durch

$$\varphi_+(f) := \varphi_+(f_+) - \varphi_+(f_-).$$

Die obigen Aussagen ergeben, dass φ_+ linear ist. Es ist leicht zu zeigen, dass sogar $\varphi_+ \in C(K)'$. Natürlich ist φ_+ positiv. Setze $\varphi_- := \varphi_+ - \varphi$. Da $\varphi_+(f) \geq \varphi(f)$ für $f \geq 0$, ist φ_- auch positiv. Schließlich verwende den ersten Teil um zu zeigen, dass μ_+ bzw. μ_- zu φ_+ und φ_- existieren, und setze $\mu := \mu_+ - \mu_-$.

Isometrie: Es bleibt zu zeigen $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\| := \|\mu_+\| + \|\mu_-\|$. Sei $\mu \in \mathcal{M}(K)$ und P und N seien nach der Hahn-Zerlegung gewählt, d.h. $P \cap N = \emptyset$, $P \cup N = K$, $\mu_+(N) = 0 = \mu_-(P)$. Wegen der Regularität von μ finden wir $K_+ \subseteq P$, $K_- \subseteq N$, mit $K_\pm$ kompakt, $\mu_\pm(N \setminus K_-) < \varepsilon$, $\mu_\pm(P \setminus K_+) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Sei $f|_{K_\pm} = \pm 1$ und sonst $-1 \leq f \leq 1$ stetig (insbesondere $\|f\|_\infty = 1$). Dann

$$\begin{aligned}
|\varphi_\mu(f)| &= \Big|\int\limits_K f \,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int\limits_{N_+} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{N_-} f \,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int\limits_{N_+} f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int\limits_{N_-} f \,\mathrm{d}\mu_-\Big| \\
&= \Big|\int\limits_{N_+} f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int\limits_{N_-} f \,\mathrm{d}\mu_-\Big| \\
&\geq \int\limits_{K_+} 1 \,\mathrm{d}\mu_+ - \int\limits_{K_-} 1 \,\mathrm{d}\mu_- - \Big|\int\limits_{P\setminus K_+} f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int\limits_{N\setminus K_-} f \,\mathrm{d}\mu_-\Big| \\
&\geq \mu_+(K_+) + \mu_-(K_-) - 2\varepsilon \geq \mu_+(P) + \mu_-(N) - 2\varepsilon - 2\varepsilon \\
&= \mu_+(K) + \mu_-(K) - 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

d.h. $\|\varphi_\mu\| \geq \mu_+(K) + \mu_-(K)$. ■

7.16. Definition. Seien μ und ν positive Maße.

a) Wir nennen ν *absolut stetig* bezüglich μ, falls für alle $A \in \mathcal{M}$ die Gleichheit $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$ impliziert; die Notation dafür ist $\nu \ll \mu$. Falls $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$, so heißen μ und ν äquivalent: $\mu \sim \nu$.

b) Ferner heißen μ und ν (zu einander) *singulär*, falls eine Menge $A \in \mathcal{M}$ existiert mit $\nu(A) = 0$ und $\mu(X \setminus A) = 0$.

c) Signierte Maße heißen absolut stetig bzw. singulär, falls ihre totale Variationen absolut stetig bzw. singulär sind.

7.17. Satz. Für ν, ν_j, μ, μ_j positive Maße gelten die folgenden Aussagen.

a) $\ll$ ist eine transitive Relation, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) $\perp$ ist eine symmetrische Relation.

c) Gilt $\nu \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, so ist $\nu = 0$.

d) Es gilt $\mu_j \ll \sum_{n=1}^\infty \mu_n$.

e) Für $\nu_j \ll \mu$ ($j = 1, \dots$) gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n \ll \mu$.

f) Für $\nu_j \perp \mu$ ($j = 1, \dots$) gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n \perp \mu$.

g) Falls $\nu \ll \mu \perp \sigma$, so gilt $\nu \perp \sigma$.

Beweis. Leicht. ■

7.18. Satz. Sei $f : X \to \mathbb{R}_+$ integrierbar, wir setzen

$$\nu(A) := \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{M}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass somit ein Maß definiert wird, das bezüglich μ absolut stetig ist.

Beweis. Siehe Maßtheorie. ■