§ 6 Adjungierte Operatoren

6.1. Definition. Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Der *zu T adjungierter Operator T'* : $Y' \to X'$ ist definiert durch

$$(T'y')(x) := y'(Tx), \qquad x \in X,\ y' \in Y',$$

d.h. $T'y' = y' \circ T$ gilt für $y' \in Y'$.

6.2. Beispiel.

(a) Sei $X = c_0$ und L =Linksshift, d.h.,

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Dann $\varphi(Tx) = y_1 x_2 + y_2 x_3 + \cdots$ für $\varphi = (y_n) \in \ell^2$. Also

$$L'(y_1, y_2, y_3, \dots) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots) = R(y_1, y_2, y_3, \dots) \qquad \text{(Rechtsshift)}.$$

(b) Auf $L^2([0,1])$ sei T durch

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

wobei $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Dann ist T' von der Form

$$(T'f)(x) := \int_0^1 k'(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

wobei $k'(x,y) = k(y,x)$.

Beweis. (a) Später wir L^2 betrachtet. Sei $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$. Dann gilt:

$$y'(Tx) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_{i+1} = (T'y')(x).$$

(b) Wähle $f, g' \in L^2([0,1])$. Dann gilt:

$$g'(Tf) = \int_0^1 g'(x) \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(y) \int_0^1 k(x,y) g'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (T'g')f.$$

■

6.3. Bemerkung. Es gelten:

(a) $(\alpha T_1 + \beta T_2)' = \alpha T_1 + \beta T_2$, $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(X,Y)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(b) $(T_2 T_1)' = T_1' T_2'$, $T_1 \in \mathscr{L}(X,Y)$, $T_2 \in \mathscr{L}(Y,Z)$.

(c) $T'' \iota_X = \iota_Y T$, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.

Beweis. (a) und (b) sind klar. (c) folgt aus

$$(T'' \iota_X(x))(y') = \iota_X(x)(T'y') = T'y'(x) = y'(Tx) = \iota_Y(Tx)(y).$$

■

6.4. Satz. Die Abbildung $\mathscr{L}(X,Y) \to \mathscr{L}(Y',X')$, $T \mapsto T'$ ist linear und isometrisch.

Beweis. Linearität ist klar. Die Gleichheit der Normen ergibt sich aus dem Satz von Hahn-Banach:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y'\|\le 1} |y'(Tx)| = \sup_{\|y'\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{\|y'\|\le 1} \|T'y'\| = \|T'\|.\end{aligned}$$

■

6.5. Bemerkung. Die Abbildung $\mathscr{L}(\ell^1, c_0) \to \mathscr{L}(\ell^1, \ell^\infty)$, $T \mapsto T'$ ist nicht surjektiv.

Beweis. Offenbar kann jedes $T \in \mathscr{L}(\ell^1, C_0)$ durch eine unendliche Matrix $A = (a_{ij})$ und jedes $S \in \mathscr{L}(\ell^1, \ell^\infty)$ durch eine Matrix $B = (b_{ij})$ auf c_{00} dargestellt werden. Hierzu verwende, dass c_{00} sowohl in c_0 als auch in ℓ^1 dicht ist.
Nach Definition der Adjungierten erhalten wir $a_{ij} = b_{ji}$ (vgl. lineare Algebra). Insbesondere wird durch $b_{ij} = 1$, $i,j \in \mathbb{N}$ ein stetiger Operator $S \in \mathscr{L}(\ell^1, \ell^\infty)$ definiert. Falls es ein $T \in \mathscr{L}(\ell^1, c_0)$ mit $T' = S$ gäbe, müsste $b_{ij} = 1$, $i,j = 1$ sein, was aber ein Widerspruch zu $T \in \mathscr{L}(\ell_1, c_0)$ ist. ■

6.6. Satz [Satz von Schauder]. Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Dann gilt die Äquivalenz

$$T \text{ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad T' \text{ kompakt}.$$

Beweis. “$\Rightarrow$”: Sei T kompakt und $(y_n') \subseteq Y'$ beschränkt. Es ist zu zeigen ist, dass $(T'y_n')$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $K := \overline{TB_X(0,1)}$. Dann ist K ein kompakter, metrischer Raum. Betrachte $f_n := y_n'|_K \in C(K)$. Die Folge (f_n) ist beschränkt und gleichgradig stetig, denn

$$|f_n(y) - f_n(\tilde{y})| \le \|y_n'\| \|y - \tilde{y}\| \le C\|y - \tilde{y}\|, \quad n \in \mathbb{N},\ y, \tilde{y} \in K.$$

Der Satz von Arzelà–Ascoli gibt die Existenz einer konvergenten Teilfolge (f_{n_k}). Es folgt:

$$\|T'y_{n_l}' - T'y_{n_m}'\| = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|y_{n_l}'(Tx) - y_{n_m}'(Tx)\| \le \|f_{n_l} - f_{n_m}\|_\infty,$$

d.h. $T'y_{n_k}'$ ist eine Cauchyfolge in X'. Somit folgt die Behauptung.

“$\Leftarrow$”: Sei T' kompakt. Dann folgt aus dem ersten Beweisteil, dass T'' kompakt ist. Bemerkung 6.3 liefert $T''\iota_X = \iota_Y T$, d.h. der Wertebereich von $T''\iota_X$ ist im abgeschlossenen Unterraum im ι_Y enthalten, also $T = \iota_Y^{-1} T'' \iota_X$. Daraus folgt die Kompaktheit von T. ■